LOGISTICA SIUE SCIENTIA CIRCA QUAMLIBET QUANTITATEM DEMONSTRATIUE...

Gilles François Gottignies, Josè Maria Fonseca de Evora, ...



LOGISTICA
SIVE
SCIENTIA

CIRCA QVAMLIBET QVANTITATEM DEMONSTRATIVE DISCVRRENS



CVI

MATHEMATICVM

NVLLVM PROBLEMA INSOLVBILE
NVLLVM THEOREMA INDEMONSTRABILE.

AVTHORE
ÆGIDIO FRANCISCO DE GOTTIGNIES
Bruxellensi Societatis Iesu.
In Collegio Romano Matheseos professore.



ROMÆ, Typis Iacobi Antonij de Lazzaris Varesij. MDCLXXV.
SVPERIORVM PERMISSV.

ILLVSTRISSIMO DOMINO

D. IACOBO SALVTIO

SERENISSIMI AVGVSTINI FILIO

PATRITIO GENVENSI.



T hoc Tibi Opuſculum conſecrarem, me primò id impulit, Illuſtriſsime Domine; quòd ſicuti Mathematicæ ſcientiæ, magis quam cætera fortaſsè ſtudia litterarum, à præſtantibus nobilitate viris excoluntur, ità ſub illuſtrium generis claritate virorum auſpicijs prodire geſtiunt in lucem. Inter hos verò Tu illico occurriſti, qui ſemper animo obuerſaris meo, longa ſerie numerans auos, ac proauos præclariſſima ſtirpe nobiles, quique Patrem præſertim habes toto terrarum orbe celeberrimæ Reipublicæ ſupremum moderatorem, ac Sereniſſimum Ducem. Hæc porro, aliaque innumera ſanguinis Tui decora, quæ maximum pretium addunt amori, quo proſequutus perpetuo fuiſti Matheſim meam, & cum ipſo ſanguine velut hæreditario iure à maioribus acceptа, vel cum annis Tecum adulta virtutum

om-

omnium ornamenta breuissimæ litteræ finibus includi nequeunt; præterea ne illorum commemoratione lædam modestiam Tuam, historicis enarranda permitto. At crimini verteretur mihi, si aliud prætermitterem nomen, quod me ad hanc nuncupationem validius vrsit; id verò est perpetuum studium, & cura, quæ diu solicitam tenuit Mathesim meam, vt nisi par pari referret, reciproco saltem aliquo munusculo veneraretur illum, à quo se honore summo gaudet affectam. Quanto ardore in illam ferebaris, quanto studio in vnum cogebas quidquid meum nancisci poteras, cum hic iunior Mathesim excolebas: quam synceram ergà illam, in hunc vsque diem, amantissimi animi voluntatem conseruasti! testantur hoc multiplicis & varij argumenti longiores cathalogi manu tua conscripti quos penes me habeo: testantur non pauca diuersorum tractatuum volumina à Te eleganti calamo conscripta, atque in patriam asportata: testantur litteræ; quibus hinc petis post discessum Tuum à me habitas prælectiones. In his omnibus à me quidem tradita, sed tamen aliena identidem meis permixta singulari quadam optimæ indolis inductione adamasti. Quam Tibi hic offero Logisticam omni ex parte arbitror meam. Hæc commodam methodum continet circa quamlibet quantitatem

in-

instituendi Mathematicos discursus, siue per illos Problemata soluenda sint, siue Theoremata demonstranda. Et quoniam non Arithmeticæ minus, quam Geometriæ aptatur, vltrò subministrat, atque expeditas reddit alas illas, quibus Mathesis in altum elata, celeri volatu assequitur non solum quæ terrarum interuallo à nobis dissita sunt; verum etiam in remotos maximè à nobis cælestes orbes enititur, & totam hanc rerum vniuersitatem celeri cursu metita, omnia naturæ arcana perscrutatur. Quo pacto mea Logistica manu quodammodo ducat ad primos Mathematicarum veritatum fontes, deinde ex illis doceat deriuare, ac demonstrare singula siue Problemata, siue Theoremata Mathematica, ex eius lectione facile intelliges. Vtinam & Tibi præsidium præbeat, & mihi, vt demonstratiua cognitione aliquando assequamur, minimum esse & omnino contemnendum quidquid mensuratur à tempore. Cuius menti hoc vnicum altè inhæserit Theorema, ille profectò toto non aberrabit cælo in solutione Problematis, quo in hoc exilio mortalitatis nullum datur præstantius, vtilius nullum; sed modum inueniet adipiscendi beatam quæ nos in Cælo manet æternitatem, à qua aberrasse, cum ipsa veritate omnia perdidisse est. Vt post varias per Logisticam relatas inge-

nij palmas huius tandem Problematis ſolutionem æternum Tibi gratulari valeam flagrantiſſime cupio.

Illuſtriſſimæ Dominationis Tuæ

Humillimus ſeruus in Domino

Aegidius Franciſcus de Gottignies
Societatis Ieſu.

AD LECTOREM.

Compendiosa scriptione in quatuor Libros distributam, prælo commiseram, illius scientiæ tractationem, quam appello Logisticam; varijs tamen ex causis, satis lentè properabat opus incohatum, atque auidè expectatum ab auditoribus meis: & primi Libri impressio necdum erat absoluta, quando vlterioris moræ impatientes, precibus permiscendo expostulationes, eam sibi operis partem petebant, quæ ad vsum sufficeret, dum expectarent reliquam: preces natæ ex solo ardore proficiendi in Mathematicis, inefficaces esse non poterant apud eum, cui ex officio incumbit, & tam laudabilem ardorem fouere, & tam vtilem profectum curare; ne tamen mutilum aliquid prodiret in lucem, à posteriori parte nostræ Logisticæ, quæ speculatiuam magis redolet, separaui anteriorem magis practicam, atque ad problematum solutionem immediatè ordinatam; hæc pars totius operis titulum præfert, Deo enim fauente, breui accedet altera, atque ita habebitur illud, quod compendiosè promittitur in titulo: pro cuius pleniori intelligentia, operæprecium erit reflectere ad ea quæ hic addo.

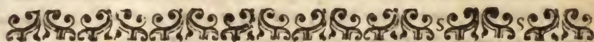
Apud Mathematicos satis familiari vsu receptum est, quantitatem diuidere in continuam & discretam; atque etiam Mathesim diuidere in Geometriam & Arithmeticam; has diuisiones non damno, illas tamen admittere non possum tali sensu, vt Mathematicis contemplationibus non concedant vllam quantitatem quæ continua aut discreta non sit, neque vllam admittant propositionem Mathematicam, quæ non debeat dici Geometrica vel Arithmetica: sic enim Mathesis amitteret propositiones, amplitudine atque vniuersalitate, cæteris omnibus præstantiores, in quibus agitur de illa quantitate, quæ neque ad continuam neque ad discretam restricta est, licet ad vtramlibet sit restringibilis. Quandoquidem enim Geometriæ obiectum non magis latè pateat quam continua quantitas, & Arithmeticæ obiectum vltra quantitatem discretam non extendatur, extra Geometriæ atque Arithmeticæ

metica limites constituta sunt illa propositiones, qua agunt de quantitate non restricta ad continuam, aut discretam. Quidquid venale exponitur, suum facere potest emptor, suum tamen dicere non potest nisi quod emit. Quilibet Mathesim potest addiscere, soli tamen illi dicendi sunt Mathematici, qui Mathesim didicerunt; pari modo non sufficit supra memoratas propositiones, tum ad Geometriam, tum ad Arithmeticam restringi posse, vt dicantur Geometrica aut Arithmetica, sed quamdiu ad continuam vel discretam quantitatem restricta non sunt, manent extra actuale dominium Geometria atque Arithmetica: manifestum tamen est huius generis propositiones Mathesi proprie conuenire: praeterea quia tum ad continuam, tum ad discretam quamlibet quantitatem restringibiles quidem sunt, sed tamen necdum restricta, cateras propositiones Mathematicas superant amplitudine, atque vniuersalitate: neque est qui ignoret vtilitatem resultantem ex maiori propositionum amplitudine, atque vniuersalitate. Vt igitur Mathesi non restricta ad Geometriam, vel Arithmeticam, sua relinquerem: atque ab his, & etiam inter se separarem, qua propria sunt, vel Geometria, vel Arithmetica, quantitatem non restrictam ad continuam vel discretam, appellaui quantitatem vniuersalem: & consequenter propositiones de vniuersali quantitate agentes, nominaui propositiones vniuersales: ipsam quoque scientiam qua solas vniuersales propositiones amplectitur, dixi Mathesim vniuersalem: quare, scientia qua Geometria appellatur, non attribuo nisi propositiones qua agunt de continua quantitate, vltra quam Geometria obiectum non extenditur; ac denique illi scientia qua dicitur Arithmetica, & pro obiecto non habet aliam quam discretam quantitatem, non concedo nisi propositiones qua agunt de quantitate discreta. Ex his tribus scientijs intelligo constitui eam scientiam, qua vsitato nomine appellatur Mathesis, & à me diuiditur in Mathesim vniuersalem, Geometriam, & Arithmeticam. Quo fructu in hunc modum Mathesim diuidam, qua vtilitate paulatim ad vniuersales propositiones meos deducam, atque allaborem, his propositionibus discursus Logisticos accommodare, aduertere poteris,

ipsam

ipſam Logiſticam percurrendo. Cæterum in prædictis tribus ſcientiis in quas Matheſis diuiditur, adeoque in tota Matheſi, nihil inuenitur, nihil ſtabilitur, niſi per Mathematicos ſiue demonſtratiuos diſcurſus, ſecundum Logicæ leges inſtitutos, hoc eſt, per legitimos ſyllogiſmos, aut enthymemata, in quibus nihil, vt verum admittatur, præter principia, aut concluſiones ex ipſis principiis legitimo diſcurſu illatas: atque hic communis eſt ſenſus Mathematicorum: qui non parum ab inuicem differunt circa modum, & ordinem adhibendi diſcurſus Mathematicos: in quo modo atque ordine, ſi non tota, certè præcipua difficultas verſatur, quæ impedit aliquem ex logico fieri Mathematicum. Requiritur, ſed non ſufficit ambulandi peritia, vt perueniatur ad deſideratum terminum, & inter plures vias quæ ad eumdem terminum ducunt, aliæ, aliis præſtare poſſunt, aut amænitate, aut facilitate, aut ſecuritate, aut breuitate, aut aliis eiuſmodi titulis; termini Mathematicis propoſiti, ſunt propoſitiones ſpectantes ad Matheſim, quæ examinandæ, vel inueniendæ, vel ſtabiliendæ proponuntur: vt ad hos terminos perueniatur, requiritur quidem, ſed non ſufficit demonſtratiuorum diſcurſuum notitia, quam docet Logica, quæque non malè dici poſset ambulandi peritia: via inſuper ſcienda eſt, & hoc nomine appellari poſset, modus ſiue ordo adhibendi diſcurſus demonſtratiuos, eoſque dirigendi ad propoſitum terminum. Iam verò licet Mathematici omnes, ad Mathematicas veritates, diſcurſibus tanquam pedibus ambulandum cenſeant, non omnes tamen conueniunt circa vias per quas ambulandum ſit: ſed in his diſcurſibus inſtituendis, diuerſi, diuerſum modum, atque ordinem proponunt; nos aliorum placita, neque propugnanda, neque impugnanda ſuſcepimus, ſed ſub titulo Logiſticæ, exponere voluimus, modum atque ordinem quem tenemus in diſcurſibus Mathematicis, & quomodo eos dirigamus ad propoſitum quemlibet terminum, hoc eſt, ad quaslibet propoſitiones Mathematicas examinandas, inueniendas, aut demonſtandas, quemadmodum verò ambulandi peritia, coniuncta cum notitia viarum ſufficit, vt ad quemlibet propoſitum terminum perueniatur, ità demonſtratiuorum diſcurſuum no-

notitia, quæ à Logica subministratur, coniuncta cum Logistica, quæ docet modum, atque ordinem quo tales discursus instituendi sunt, atque dirigendi ad quamlibet propositionem Mathematicam, etiam sufficit, vt quælibet propositio Mathematica, siue quodlibet Mathematicum Problema, aut Theorema examinetur, inueniatur, aut stabiliatur: quandoquidem igitur Logistica, quam tradimus, supponat paulò ante memoratam Logicæ notitiam, manifestum est, Logisticæ, Mathematicum nullum Problema insolubile, nullum Theorema indemonstrabile inueniri. An Logisticam legitimè proponam, atque exponam, non est meum iudicare, qui in propria causa iudex admitti non debeo, tibi Lector, hoc iudicium relinquitur, teque hoc vnum rogo, vt in bonum commune meliorem afferas, si damnas meam.



EGo Dominicus Brunaccius Societatis Iesu, in Prouincia Romana Præpositus Prouincialis, potestate ad id mihi facta à Patre nostro Generali Io. Paulo Oliua, facultatem facio, vt liber cui titulus *Logistica*, à P. Ægidio de Gottignies nostræ Societatis Sacerdote conscriptus, & eiusdem Societatis doctorum virorum iudicio approbatus, typis mandetur, si ijs, ad quos spectat, ita videbitur. In quorum fidem has litteras manu mea subscriptas, & sigillo muneris mei signatas dedi. Romæ 4. Septembris 1674.

Dominicus Brunaccius.

Imprimatur, si videbitur Reuerendiss. P. Mag. Sac. Pal. Apost.

I. de Ang. Archiep. Vrb. Vicesg.

Imprimatur,
Fr. Raymundus Capisuccus Ord. Prædic. Sac. Pal. Apost. Mag.

PROOEMIVM.

In quo prius compendiosè proponitur summa totius nostræ Logisticæ: deinde breuiter declarantur singula capita Libri primi.



PLatonem memorant alicuius regulæ inuentorem; quam nonnulli Algebræ, vel etiam Analyticæ regulam appellant; hæc à non paucis maximi nominis Mathematicis, singulari studio fuit exculta, semperque summo in precio habita; priscis tamen temporibus, ità Arithmeticæ, erat accomodata, vt Geometriæ parùm deseruiret; nequè ante præsens sæculum lucem viderunt lucubrationes eorum, qui hanc regulam, ità proposuerunt, vt non minus Geometriæ, quam Arithmeticæ esset accommodata. Apud varios authores, qui scripserunt de prædicta regula, vel etiam de Arithmeticæ elementis, vsitata est vox Logistica: verum, quidquid sit de sensu in quo hanc vocem intelligunt, à nobis ità adhibetur, vt Logistica non malè dici posset, circà quantitatem demonstratiuè discurrens scientia; huius Logisticæ pars non postrema, sed, vt ità dicam practica, siuè ad praxim immediatè ordinata, Logisticæ regula appellatur, quæ non differt ab illa regula, quam paulo ante diximus ab alijs, aut Algebræ, aut Analyticæ, regulam fuisse nominatam; hæc Logisticæ regula, problematibus soluendis potissimum vtilis est: ea tamen, quæ requiruntur in ordine ad ipsius Regulæ vsum, ità à nobis proponuntur, vt, non minùs vtilia sint theorematibus demonstrandis, inueniendis, atque examinandis, quam soluendis problematibus; quod si ità est, quam verè alij afferunt, prædictæ regulæ eam vim esse, vt, nullo quæstionum, siue problematum genere limitetur, tàm verè de nostra Logistica pronunciari poterit, eam, nullo, aut theorematum, aut problematum genere limitari, atque adeo per Logisticam inueniri, ac demonstrari posse, quidquid Geometriæ aut Arithmeticæ prima principia excedit; arrogans nonnulli videri posset hoc pronunciatum, tamen, non tantum verum, sed planè euidens intelliget, ex ijs quæ dicemus Libro Tertio: interim si placet habeatur fal-

ſum; quandoquidem enim ad tyrones ſcribam, atque illos in Mathematicis inſtituere vnicus Scriptionis noſtræ finis ſit, etiam in ſcriptione modum, atque ordinem ſequor, tyronum inſtitutioni magis conuenientem; hinc Libro primo, nullis adductis rationibus, atque prætermiſſis diſputationibus, vt in practica Geometria, atque Arithmetica vſitatum eſt, breuiter propono, prius quidem quæ ad vſum Logiſticæ regulæ deſeruiunt, deinde ipſam regulam, ac denique Libro ſecundo in varijs exemplis regulæ vſum declaro; à facilioribus, quantum poſſum, ſemper gradum faciendo ad difficiliora. Abſoluto in hunc modum Libro primo, ac ſecundo, qui duo Libri potiſſimum inſeruiunt ad Logiſticæ regulæ vſum acquirendum, Libro tertio paulo altius reſumo, atque expono, tàm dictæ regulæ, quàm vniuerſæ Logiſticæ noſtræ inſeruientia principia, & probo ſingula quæ probatione videntur indigere. Nonnullas controuerſias, quæ ad profundiorem principiorum intelligentiam non parum videntur prodeſſe, in quartum Librum reijcio, vbi illas allatis vtrimque Argumentis propono; atque ità quatuor Libris complector, quæ exiſtimo neceſſaria, vt aliquis ex Logico fiat Geometra, atque Arithmeticus. In hac noſtra Logiſtica nihil ſuppono aliundè cognitum, niſi eam Logicæ partem, quæ docet requiſita, ad legitimè efformandos ſyllogiſmos, atque enthymemata; præterea Arithmeticæ practicæ eam partem, quæ docet numerorum additionem, ſubtractionem, multiplicationem, diuiſionem, atque auream regulam; denique, alias à nobis edita Geometriæ planæ elementa, vel ſaltem in illis contenta prima Geometriæ principia.

His breuiter præmiſſis circa noſtram Logiſticam, vniuerſi Libri primi materiam paulo ſpecialius declaro. Hic liber in nouem capita diuiſus eſt; præcipuus finis eius eſt, docere vſum Regulæ Logiſticæ, quæ poſtremo huius Libri capite exponitur, atque aliquot exemplis declaratur: præcedentia capita continent varia quæ vtilia ſunt ad commodum vſum regulæ Logiſticæ. Primo capite proponitur modus, commodè atque compendiosè ſcribendi varios numeros, ac voces; quæ ſcriptio eam ferè in Logiſtica commoditatem affert, quæ in Arithmetica practica habetur à notis arithmeticis, quibus numeri exprimi conſueuerunt, vt poſſint addi, ſubtrahi, multiplicari, & diuidi, &c. Licet enim decem notæ Arithmeticæ practicæ ſufficiant, ad ſcribendos quoſlibet numeros determinatos, hoc eſt, qui certam atque determinatam vnitatum multitudinem indicant, non ſufficiunt ad exprimendos numeros indeterminatos, hoc eſt, illos qui incertam

ſiue

siue indeterminatam vnitatum multitudinem significant; huiusmodi indeterminatos numeros Alphabeti literis exprimere consueuerunt Arithmetici, quemadmodum Geometræ quantitates continuas literis indicant, hunc vsum retinemus; quia tamen diuersos numeros indeterminatos debemus exprimere, literis numeros repræsentantibus, apponimus, quæ sufficiunt ad eam diuersitatem indicandam, quæ pro Logistica necessaria est.

In secundo Capite docemus operationes vniuersales, hoc est additionem, subtractionem, multiplicationem, diuisionem, atque radicum extractionem, quæ operationes non solum numeris determinatis conueniunt, verum etiam alijs quibuslibet quantitatibus communes sunt, & hac de causa vniuersales appellantur. Producta ex huiusmodi operationibus vniuersalibus, subinde longa sunt, atque incommoda; quomodo hoc casu ad breuiora atque commodiora reduci possint, docetur cap. 3.

Si recte expendas hæc tria capita inuenies nihil in illis doceri, nisi modum compendiosè scripto exprimendi, quantitates, operationibus vniuersalibus seruientes, vel ex talibus operationibus productas.

In subsequentibus duobus Capitibus de æquationibus agitur, cuius maximus vsus in tota Logistica Ex. gr. vt inferatur inter se æqualia esse, quæ eidem tertio æquantur; vel vt ex æquatione inter numerum determinatum atque indeterminatum existente, inueniatur valor numeri indeterminati, atque ita cognitus fiat, siue determinatus; quandoquidem igitur æquationum vtilitas maxima sit in Logistica, & tamen quælibet æquationes non sint æqualiter vtiles, quarto & quinto capite traduntur modi, quibus ex vna æquatione, diuersæ aliæ inferri possint, vt sic ex minus vtili, ad vtiliorem perueniatur; id tamen cap. 4. docetur independenter ab vlla mutatione numerorum, aut quantitatum, inter quas inuenitur æquatio: quinto capite idem docetur, sed dependenter ab aliqua mutatione numerorum, aut quantitatum, inter quas prior æquatio consistebat: ijs enim quæ quarto capite tradita sunt, coniungendo illa, de quibus agitur in tertio capite, docetur modus, quo longiores, atque adeò molestiores, & minus vtiles æquationes, mutari possint in breuiores, atque magis vtiles.

Præter modos cap. 4. & 5. propositos, quibus ex vna æquatione altera inferri potest, non pauci alij, immediatè habentur ex veritatibus cap. 8. propositis, atque ex illis, non tantum ex vna æquatione inter quantitates absolutas existente, infertur altera æquatio, etiam existens inter quantitates absolutas,

verum etiam ex æquatione consistente inter rationes, infertur æquatio consistens inter quantitates absolutas : & vicissim ex æquatione consistente inter quantitates absolutas, infertur æquatio consistens inter rationes. Sexto, & septimo capite agitur de resolutione numerorum indeterminatorum, hoc est quomodo in varijs circumstantijs inueniri possit valor numeri indeterminati, quod capite 6. docetur dependenter ab aliquo numero eiusdem Classis, cuius valor cognitus sit : hoc idem capite septimo docetur, sed dependenter ab aliqua æquatione. Octauo capite proponuntur definitiones, & veritates aliquæ magis necessariæ pro Logisticæ regula. In hunc modum traditis requisitis pro Logisticæ regula, capite 9. proponitur Logisticæ regula, & declaratur varijs eiusdem problematis solutionibus, atque ità Libro primo imponitur finis.



LO-

LOGISTICAE

LIBER PRIMVS.

NOta primo. si occurrant voces aliquæ, magis propriè spectantes ad nostram Logisticam, atque de illarum significatione dubitetur, consuli poterit index, vel initium capitis octaui huius Libri, vbi tales voces breuiter exponuntur: & malui Logisticæ studiosum pro eiusmodi vocum intelligentia ad dictum caput remittere, quam definitiones separare à reliquis Logisticæ principijs, quæ videbantur spectare ad Caput octauum.

Nota secundo. quoties elementa citantur, sermo est de nostris planæ Geometriæ elementis Romæ editis 1669.

CAPVT PRIMVM.

Exponuntur Characteres, & notæ, quibus vtimur in scriptione Logisticæ.



N omni scriptione adhibentur characteres, qui vel soli, vel plures simul, atque certo ordine dispositi, repræsentant voces, quibus enunciantur conceptus mentis. Tales characteres sunt, qui in Alphabeto continentur; & quamuis Alphabeti characteres sufficiant, etiam ad exponendas voces, quibus numeri enunciantur, tamen maioris compendij, atque commoditatis gratia, ab Arithmeticis assumuntur alij characteres, vel notæ, quibus compendiosius scripto exprimantur numeri. Eiusmodi characteres, in vulgari Arithmetica vsitati, sunt sequentes decem 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. Præter hos characteres in vulgari Arithme-

tica

tica vſitatos, non nulli alij à nobis aſſumuntur in ſcriptione Logiſtica, quos hic breuiter exhibeo, cum appoſitis vocibus quas repræſentat, & quæ pro characteribus debent ſubſtitui, vt ſcriptio legitimè enuncietur.

† Lege plus. ex. gr. 3 † 2. Lege tria plus duo: vel tria plus duobus.

— Lege minus. ex.gr. 3 — 2. Lege tria minus duo.

Nota quod vox ſignum ſimpliciter poſita adhibeatur ad ſignificandum aliquem ex duobus characteribus † vel —.

= Lege æquatur ex. gr. 3 † 2. = 5. Lege tria plus duo, æquatur quinque. Item 3 — 2 = 1. Lege tria minus duo, æquatur vni.

A B C D, &c. Litera quæuis, aut maiuſcula, aut minuſcula hic aliam ſignificationem non habet, quam in communi Arithmetica, atque Geometria, vbi literæ repræſentant, aut numeros, aut lineas, aut angulos, aut puncta, &c. Pro quibus ex conuentione, ſiue hypotheſi prius facta ſubſtituuntur. Ex.gr. facta hypotheſi quod A repræſentet numerum 10, & quod B repræſentet numerum 9, proponatur duplex ſcriptio, quarum prima ſit A † B = 19. ſecunda ſit 10 † 9 = 19; prior ita legitur, A plus B æquatur nouemdecim; ſecunda ita legitur, decem plus nouem æquatur nouemdecim; & duæ prædictæ ſcriptiones idem ſignificant, licet diuerſis vocibus enuncientur.

Hic aduertendum, quantitates quæ alphabeti literis exprimuntur, diſtingui in dignitates, & radices: quarum vocum definitiones videri poſſunt cap. 8. iam vero radicibus ſignificandis inſeruit ſola litera R, reliquæ adhibentur ſignificandis dignitatibus; verum ſiue dignitatem, ſiue radicem ſignificet litera, ſemper numerus illi immediatè appoſitus verſus leuam, erit eius numerator; & numerus illi immediatè, vel tantum mediante litera o, appoſitus verſus dexteram, erit eius denominator. Tam dignitati, quam radici, ſemper conuenit aliquis numerator, & denominator; quilibet numerator, vel denominator quando ab vnitate diuerſus eſt, expreſsè ponitur: ſi vnitas eſt, pro libitu, vel expreſsè ponitur, vel omittitur, denique numera-

tor

tor exprimitur per voces vnum, duo, tria, quatuor, &c. & denominator exprimitur per voces, nullus, primus, ſecundus, tertius, quartus, &c. his prænotatis.

2 *a* 1 Lege duo A prima. item *3 a 2*, lege tria A ſecunda. item *3 a 0*, lege tria A nulla. item *4 b 3*, lege quatuor B tertia. item *4 B 0*, lege quatuor B nulla. item A 2, lege A ſecundum, & intellige idem, ac ſi diceretur vnum A ſecundum. item *3* A, lege tria A, & intellige idem, ac ſi diceretur tria A prima.

2 *a o* 1 Lege duo A oppoſita prima. item *3 a o 2*, lege tria A oppoſita ſecunda; adeo vt litera o, æquiualeat voci oppoſitum, quando ponitur immediatè inter aliam literam præcedentem, & numerum ſubſequentem. Denique litera o, ſubſtituta, vt diximus pro voce oppoſitum, vocatur character oppoſitionis.

1 *R* 2 * 8 Lege vna radix ſecunda numeri octo, vel vna radix ſecunda octo; vbi aduerte, aſteriſmum nulla voce exprimi, ſed in ſcriptione ſeparare numerum, cuius radix ſignificatur, à denominatore radicis. *3 R* 1 * 4*a* 1 lege tres radices primæ, quatuor A primorum. item 7 *R* 2 * A, lege ſeptem radices ſecundæ A. item 2 *R 3* * 12 † 4, lege duæ radices tertiæ, duodecim plus quatuor.

in Lege in, & ſubaudi ductum. Ex.g. *3 in 5*, lege tria in quinque. item *3 in 5 in 2*, lege tria in quinque in duo. ſenſus primæ enunciationis eſt, tria ductum in quinque. ſenſus ſecundæ enunciationis eſt, tria ductum in quinque, & hoc productum, ductum in duo: adeo, vt verum ſit, quod *3 in 5* = 15. item *3 in 5 in 2* = *30*. particula *in* eſt character multiplicationis.

$\frac{A}{B}$ Lege A diuiſum per B. adeo vt lineola interpoſita inter numerum ſuperiorem, & inferiorem, æquiualeat vocibus diuiſum per: Ex.Gr. $\frac{3 \dagger 4}{5}$, lege tria plus quatuor, diuiſum per quinque. item $\frac{2\,a\,1}{4}$, lege duo A prima diuiſa per quatuor. item $\frac{4}{8}$ lege quatuor diuiſum per octo. poteſt tamen hæc vltima ſcriptio etiam legi, vt docetur in vulgari Arithmetica, dicendo, quatuor partes octauæ, vel quatuor octauæ: verum ſiue

vno,

vno, ſiue altero modo legatur, nihil diuerſum ſignificatur.

per Lege per, ſubaudi diuiſum: Ex.Gr. *3 per 5*, lege tria per quinque. item *3 per 5 per 2*, lege tria per quinque, per duo. ſenſus primæ enunciationis eſt, tria diuiſum per quinque, ſenſus ſecundæ enunciationis eſt, tria diuiſum per quinque, & hoc productum diuiſum per duo; adeo vt lineola ſuperiorem numerum ab inferiori ſeparans, & particula *per*, antecedentem numerum à ſubſequente ſeparans, idem ſignificent: ſubinde tamen vna, ſubinde altera ſcriptio commodior eſt. Lineola quæ diuiſum ſignificat, & inſuper particula, *per*, illi æquiualens, ſunt characteres diuiſionis, ſiue fractionis: & hæc lineola etiam exprimi poteſt per ſolam vocem per, ſi placet ſubaudire diuiſum, vt fit quando ipſa particula, *per*, inſcriptione adhibetur.

& Particula &, vſitato modo legitur: adhibetur quando eſt periculum confuſionis, ſiue æquiuocationis, atque ab inuicem ſeparandi ſunt numeri, alioquin ſucceſſiuè ſcribendi. Ex.Gr. prima ſcriptio ſit, 4 † 5 *in 3*. ſecunda ſcriptio ſit, 4 *&* † 5 *in 3*, prima ſcriptio 4 † 5 *in 3* = 27: ſecunda ſcriptio 4 *&* † 5 *in 3* = 19; adeo vt prima inſcriptio a ſecunda tantum differat, quantum numerus 27 differt a numero 19: prior enim ſcriptio ſignificat productum, quod habetur, quando quatuor ſimul cum quinque, hoc eſt nouem, ducitur in tria; quod productum eſt 27. ſecunda ſcriptio ſignificat productum, quod habetur, quando quinque ducitur in tria, & tunc illi additur quatuor, quod productum eſt 19, quandoquidem numerus quinque ductus in numerum tria det quindecim, & numero quindecim addendo quatuor habeatur 19. ſimiliter *3 R* 1 * 16 † 9 = 15: verum *3 R* 1 * 16 *&* † 9 = 21.

ad Particula, ad, vſitato modo legitur, ſubauditur ratio. Ex. Gr. *3 ad 5*, lege tria ad quinque, vel ratio tria ad quinque. item 1 *a* 1 ad 2 *b* 1, lege vnum A primum, ad duo B prima, vel ratio vnius A primi, ad duo B prima. item *2 ad 4* = *3 a* 1 ad *6 a* 1, lege duo ad quatuor, æquatur tria A prima, ad ſex A prima; vel ratio duo ad quatuor, æquatur rationi trium A primorum, ad ſex A prima.

Lite-

q Littera, *q*, immediatè subsequens aliquem numerum, exprimitur per vocem quadratum. Ex gr. A *q*, lege à quadratum. Item 1 *q*, lege vnum quadratum. Item 4 *q*, lege quatuor quadratum. Item A 2 † B 2 *q*, lege A secundum, plus B secundo, quadratum. Item 4 *a* 2 − 7 *q*, lege quatuor A secunda, minus septem, quadratum, aduerte hic, quod vox, quadratum, indicata, vt diximus per litteram *q*, ita intelligenda sit, vt æquiualeat vocibus, *in se ductum*: adeo vt A *q*, idem significet, ac A in se ductum, similiter sequentes scriptiones, quæ dicuntur æquales, interse planè æquiualent, licet diuersimode enuncientur. A *q* = A in A. Item A 3 *q* = A 3 in A 3. Item A † B *q* = A † B in A † B. Item 1 *a* 2 − 1 *a* 1 *q* = 1 *a* 2 − 1 *a* 1 in 1 *a* 2 − 1 *a* 1.

Diligenter hic notandum, quod licet A 2, æquiualeat A *q*, cum vtraque scriptio æquiualeat eidem tertiæ A in A; tamen B † A 2 non æquiualet B † A *q*, supposito enim quod A = 5, & quod B = 6, tunc B † A 2 = 31: verum B † A *q* = 121.

♎ Lege quod insuper æquatur: vel quod etiam æquatur. Ex. gr. 10 = 6 † 4 ♎ 8 † 2, lege decem æquatur sex plus quatuor, quod etiam æquatur octo plus duobus. Adhibetur hic scribendi modus, quando successiuè ponuntur plus quam duæ quantitates, de quibus constat, primam secundæ, & insuper secundam tertiæ æqualem esse, vt inferri possit etiam primam tertiæ æquari.

Nota, proximè subsequentem scriptionem, cæteris hactenus propositis, molestiorem esse, sed etiam minus vsitatam: adeo vt à tyronibus liberè possit negligi, licet illam hic noluerim omittere.

( ) Parenthesis numeros continens, æquiualet voci, inclusus, Ex. gr. 1 R 2 * (64 *a* 3), lege vna radix secunda sexaginta quatuor A tertiorum, atque inclusorum. Item 1 R 2 * (64) *a* 3, lege vna radix secunda sexaginta quatuor A tertiorum, habentium numeratorem inclusum. Item 1 R 2 * 64 *a* (3), lege vna radix secunda sexaginta quatuor A tertiorum, habentium denominatorem inclusum.

Vt intelligatur quid significent diuersæ illæ scriptiones, non sufficiunt illa, quæ hactenus tradita sunt,

ſed præterea requiruntur, tradenda cap. 3; vbi docetur, duo fieri debere, vt habeatur valor numeri radicalis; primo enim ex numero poſt aſteriſmum ſcripto, extrahenda eſt radix, indicata à denominatore, qui aſteriſmum præcedit: ſecundo inuenta radix multiplicanda eſt per numeratorem numeri radicalis. Ex. gr. ſit numerus radicalis 3 R 2 * 8; vt huius numeri valor habeatur, primo ex numero 8 ſecunda radix extrahenda eſt, quæ radix eſt 2: deinde, 2, debet duci in numeratorem 3, ex quo ductu producitur numerus 6, qui eſt valor numeri radicalis propoſiti: etenim 3 R 2 * 8 ⩦ 6. Iam vero ex duobus quæ fieri debent ad inueniendum valorem numeri radicalis, primum factum eſſe indicat parentheſis, hoc eſt pars incluſa exhibet illud quod habetur ex prædicta priori operatione: pars non incluſa exhibet illud circa quod prior ex prædictis operationibus adhuc remanet facienda: ad cuius plenam intelligentiam, ſufficient ſequentes æquationes 3 R 2 * 8 ⩦ 6. Item 3 R 2 * (2) ⩦ 6. Item 3 R 2 * 8 ⩦ 3 R 2 * (2). Item licet 3 R 2 * 8 ⩦ 6, tamen 3 R 2 * (8) ⩦ 24.

Rurſus ſuppoſito quod 1 *a* 1 ⩦ 2: tunc 3 R 2 * 8 *a* 3 ⩦ 12. Item 3 R 2 * (2 *a* 1) ⩦ 12. Item 3 R 2 * (2) *a* 3 ⩦ 12. Item 3 R 2 * 8 *a* (1) ⩦ 12. Item 6 *a* 1 ⩦ 12.

Ab his ſcriptionibus diuerſas, vel plures aſſumere, cuilibet integrum eſt. Hactenus illas expoſui, quibus vtor in primo, aut ſecundo libro. Cæterum maior breuitas atque commoditas, vnica cauſa eſt, eſt, propter quam adhibentur: atque hæc breuitas ac commoditas eſt ſimilis illi, quæ in vulgari Arithmetica practica habetur, à decem notis initio huius capitis propoſitis, quibus vulgares numeri omnes exprimi conſueuerunt.

CAPVT II.

De vniuerſalibus Logiſticæ operationibus.

LOgiſticæ operationes vniuerſales, de quibus hoc capite agimus, ſunt ſequentes quinque; Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diuiſio, & Radicum extractio. Vocantur operationes vniuerſales, quia conueniunt quibuslibet quantitatibus Logiſticè ſcriptis; differunt, à ſimilibus operationibus, quæ traduntur in vulgari Arithmetica: primo, quod conueniant quibuslibet quanti-

tatibus

tatibus Logiſticè ſcriptis, licet operationes Arithmeticæ practicæ, non conueniant niſi numeris vulgaribus; ſecundo quod operationum vniuerſalium producta, potius Logiſticà ſcriptione compendiosè exhibeant, quid faciendum ſit, vt habeatur productum: quam productum aliquod, quale habetur per operationes Arithmeticæ practicæ.

In operationibus vniuerſalibus, inuenitur quidem maxima commoditas, atque vtilitas, reſultans ex indicata vniuerſalitate; verum etiam in illis non leuis incommoditas inuenitur, cauſata à longioribus ſcriptionibus, quibus producta vniuerſalia exprimuntur: ſemper enim continent ſigna † vel −, vel characteres multiplicationis, diuiſionis, aut radicum; quandoquidem abſoluantur per dicta ſigna, aut characteres, ſiue per hoc, quod pro operationibus dati numeri, per dictos characteres, aut ſigna diuerſimodè connectantur. Verum incommodo quod à longioribus ſcriptionibus cauſatur, remedium aliquod affertur ſequenti capite, in quo docetur, quomodo ſcriptiones longiores reducantur ad breuiores.

Nota primo, pro quatuor prioribus operationibus, de quibus hic agimus, datos numeros, diſtingui in ſuperiores, & inferiores. Ex duobus datis numeris ſuperior vocatur, cui alter addendus eſt, vel ex quo alter ſubtrahendus eſt, vel qui per alterum multiplicandus, aut diuidendus proponitur. Ex datis numeris inferior appellatur, qui alteri addendus, vel ex altero ſubtrahendus proponitur, vel per quem alter multiplicari debet, aut diuidi; quæ diſtinctio, non ſemper quidem, ſed tamen ſatis frequenter neceſſaria eſt, atque etiam in vulgari Arithmetica vſitata, in qua vſu receptum eſt, ad inſtituendam operationem, ſuperiori loco ſcribere illum ex datis numeris, quem hic ſuperiorem appellamus, atque ſuperiori alterum ſubſcribere, quem hic appellamus inferiorem.

Nota ſecundo, characterem Multiplicationis eſſe particulam in. Characterem diuiſionis eſſe lineolam, quæ diuiſum ſignificat, & etiam particulam, *per*. Denique characterem radicum eſſe litteram R, quæ voci radix æquiualet.

Additio vniuerſalis.

NVmeri dati pro additione, nullo modo immutati, cum ſuis ſignis ſucceſſiuè ſcribantur: ſic enim ſcripti, conſtituent

productum vniuerſale quæſitum. Vide exempla additionis vniuerſalis.

Nota nihil referre quo ordine dati numeri ſucceſſiuè ſcribantur, ſiue quis ex datis alterum præcedat, aut ſequatur, ſi tamen aliquis ex datis numeris, contineat characterem Multiplicationis, Diuiſionis, aut radicum: plerumque, in ſucceſſiua ſcriptione, ſuperior ex datis ab inferiori ſeparandus eſt particula *&*, propter periculum æquiuocationis.

Subtractio vniuerſalis.

NOta. Si inferior ex datis numeris contineat characterem Multiplicationis, Diuiſionis, aut Radicum, & præſcribatur mutatio ſignorum, tantum mutari debent ſigna quæ præcedunt dictos characteres: non vero illa quæ ſubſequuntur, ſiue verſus dexteram, ſiue deorſum ſubſequantur.

Primo, obſeruando notam hic præmiſſam, ſingula ſigna numeri inferioris, mutentur in ſigna oppoſita. Deinde dati numeri addantur, vt dicitur in additione vniuerſali: ſic enim habebitur ſcriptio, exhibens productum vniuerſale quæſitum. Vide exempla ſubtractionis vniuerſalis.

Multiplicatio vniuerſalis.

EX datis numeris vnus ante, alter poſt particulam, *in*, ſcribatur: ſic enim dati numeri particula, *in*, connexi, conſtituent productum vniuerſale quæſitum. Vide exempla multiplicationis vniuerſalis.

Nota, ſi aliquis ex datis numeris contineat particulam *&*, tunc conſiderando partes particula, *&*, ſeparatas, ac ſi eſſent diuerſi numeri, ſinguli ſuperiores, cum ſingulis inferioribus, particula, *in*, connectendi erunt. Vide exemplum 8, 9, & 10.

Diuiſio vniuerſalis.

SVperior ex datis numeris ſcribatur ſupra lineolam quæ diuiſum ſignificat: vel ante particulam, *per*: atque inferior ex datis numeris infra eamdem lineolam, vel poſt eamdem particulam,

lam, *per*, ſcribatur; ſic enim dati numeri charactere diuiſionis connexi, conſtituent productum vniuerſale quæſitum. Vide exempla diuiſionis vniuerſalis.

Nota primo, ſi inferior ex numeris pro diuiſione datis contineat particulam, *&*, tunc ſuperior cum inferiori connectendus eſt, mediante lineola, quæ diuiſum ſignificat: non vero mediante particula, *per*: quæ particula, non bene ſeruit, niſi in caſu quando inferior non continet partes particula, *&*, connexas.

Nota ſecundo, ſi placeat particulam, *per*, adhibere, quando ſuperior quidem continet partes particula *&* connexas, ſed tamen inferior non contineat tales partes: tunc conſiderando partes in dato ſuperiori numero particula, *&*, connexas, ac ſi eſſent diuerſi numeri, ſinguli ſuperiores particula, *per*, connectendi erunt, cum dato inferiore numero. Vide exemplum 13, & 14.

Radicis extractio vniuerſalis.

NOta. Quemadmodum præcedentes operationes vniuerſales, nihil docent, niſi modum Logiſticè ſcribendi productum ex dictis operationibus: ita etiam hic nihil aliud docetur, quam modus Logiſticè ſcribendi quoſcumque numeros radicales, per quos in Logiſtica indicantur producta ex radicum extractione.

Primo loco ſcribatur numerus vulgaris indicans quot radices placeat ſignificare; huic numero vulgari immediatè verſus dexteram apponatur littera R; immediatè poſt litteram R, ſubſequatur numerus vulgaris, indicans quales ſint radices, quas placet ſignificare: nimirum an ſint primæ, ſecundæ, tertiæ, &c. poſt hunc numerum vulgarem, immediatè ſequatur aſteriſmus: denique poſt aſteriſmum ponatur ſcriptio indicans illud cuius radices ſignificari debent. Sic enim habebitur quæſitum: vt ſatis patet ex nota hic præmiſſa, & dictis capite primo.

Exempla operationum vniuerſalium.

IN ſingulis exemplis, ſupra lineam ſcripti ſunt duo numeri, qui pro operatione ſupponuntur dati, quorum numerorum, ſuperior, cenſendus eſt ille, qui ſuprriori loco ſcriptus eſt: & inferior, qui inferiori loco ſcribitur, denique immediatè infra lineam exhibetur productum ex operatione: quod productum, in aliquibus

exem-

exemplis vna, in alijs pluribus numerorum lineis exhibetur, etenim longiora producta commode exhiberi non poterant vnica linea: & etiam aliqui fracti numeri requirebant plures lineas, ſiue ſeries numerorum.

Exempla additionis vniuerſalis.

I $\begin{array}{l} 36 \\ 14 \\ \hline 36+14 \end{array}$ II $\begin{array}{l} -36 \\ -14 \\ \hline -36-14 \end{array}$ III $\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline A+B \end{array}$ IV $\begin{array}{c} A \\ -B \\ \hline A-B \end{array}$

V $\begin{array}{l} 23-4 \\ -22+9 \\ \hline 23-4-22+9 \end{array}$ VI $\begin{array}{l} 4\,a\,1+7 \\ 15-1\,a\,1+14 \\ \hline 4\,a\,1+7+15-1\,a\,1+14 \end{array}$

VII $\begin{array}{l} 1\,a\,1+3 \text{ in } -7 \\ 3\,a\,1 \text{ in } 4 \,\&+10 \\ \hline 1\,a\,1+3 \text{ in } -7 \,\&+3\,a\,1 \text{ in } 4 \,\&+10 \end{array}$

VIII $\begin{array}{l} 4 \text{ in } 7 \\ 1\,a\,1+3 \\ \hline 4 \text{ in } 7 \,\&+1\,a\,1+3 \end{array}$ IX $\begin{array}{l} A \text{ in } B+C \\ A-B \\ \hline A \text{ in } B+C \,\&+A-B \end{array}$

X $\begin{array}{l} 2\,a\,1 \\ 7-2\,R\,1 * 1\,a\,1 \\ \hline 2\,a\,1+7-2\,R\,1 * 1\,a\,1 \end{array}$

Exempla ſubtractionis vniuerſalis.

I $\begin{array}{l} 36 \\ 14 \\ \hline 36-14 \end{array}$ II $\begin{array}{l} -36 \\ -14 \\ \hline -36+14 \end{array}$ III $\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline A-B \end{array}$ IV $\begin{array}{c} A \\ -B \\ \hline A+B \end{array}$

V $\begin{array}{l} 23-4 \\ -22+9 \\ \hline 23-4+22-9 \end{array}$ VI $\begin{array}{l} 4\,a\,1+7 \\ 15-1\,a\,1+14 \\ \hline 4\,a\,1+7-15+1\,a\,1-14 \end{array}$

1 a 1

$$\text{VII}\ \begin{array}{l} 1\,a\,1 + 3\ in\ -7 \\ \underline{3\,a\,1\ in\ 4\ \text{\&} + 10} \\ 1\,a\,1 + 3\ in\ -7\ \text{\&} -3\,a\,1\ in\ 4\ \text{\&} -10 \end{array}$$

$$\text{VIII}\ \begin{array}{l} 4\ in\ 7 \\ \underline{1\,a\,1 + 3} \\ 4\ in\ 7\ \text{\&} -1\,a\,1 - 3 \end{array} \qquad \text{IX}\ \begin{array}{l} A\ in\ B + C \\ \underline{A - B} \\ A\ in\ B + C\ \text{\&} - A + B \end{array}$$

$$\text{X}\ \begin{array}{l} 2\,a\,1 \\ \underline{7 - 2\,R\,1 * 1\,a\,1} \\ 2\,a\,1 - 7 + 2\,R\,1 * 1\,a\,1 \end{array}$$

$$\text{XI}\ \begin{array}{l} 25 + \frac{23-4}{-22+9} \\ \underline{13 - \frac{4+7}{-34+8}} \\ 25 + \frac{23-4}{-22+9}\quad -13 + \frac{4-7}{-34+8} \end{array}$$

$$\text{XII}\ \begin{array}{l} 4\ per\ 8 + 3 \\ \underline{7 + 9\ per\ 4} \\ 4\ per\ 8 + 3\ \text{\&} -7 - 9\ per\ 4 \end{array}$$

$$\text{XIII}\ \begin{array}{l} 7\,R\,1 * 12 - 3 \\ \underline{4\,R\,1 * 7 + 12 - 5} \\ 7\,R\,1 * 12 - 3\ \text{\&} -4\,R\,1 * 7 + 12 - 5 \end{array}$$

Exempla Multiplicationis vniuersalis.

$$\text{I}\ \begin{array}{l} 36 \\ \underline{14} \\ 36\ in\ 14 \end{array} \qquad \text{II}\ \begin{array}{l} 36 \\ \underline{-14} \\ 36\ in\ -14 \end{array} \qquad \text{III}\ \begin{array}{l} A \\ \underline{B} \\ A\ in\ B \end{array} \qquad \text{IV}\ \begin{array}{l} A \\ \underline{-B} \\ A\ in\ -B \end{array}$$

$$\text{V}\ \begin{array}{l} 23 - 4 \\ \underline{-22 + 9} \\ 23 - 4\ in\ -22 + 9 \end{array} \qquad \text{VI}\ \begin{array}{l} 4\ in\ 7 \\ \underline{1\,a\,1 + 3} \\ 4\ in\ 7\ in\ 1\,a\,1 + 3 \end{array}$$

A in

$$\text{VII}\ \begin{array}{l} A \text{ in } B + C \\ A - B \\ \hline A \text{ in } B + C \text{ in } A - B \end{array} \qquad \text{VIII}\ \begin{array}{l} 2 \text{ in } 7 \ \& + 4 \\ 20 \\ \hline 2 \text{ in } 7 \text{ in } 20 \ \& + 4 \text{ in } 20 \end{array}$$

$$\text{IX}\ \begin{array}{l} A \text{ in } B \ \& + C \\ A - B \\ \hline A \text{ in } B \text{ in } A - B \\ \& + C \text{ in } A - B \end{array} \qquad \text{X}\ \begin{array}{l} 2 \text{ in } 7 \ \& + 4 \\ 20 \ \& + 3 \text{ in } 5 \\ \hline 2 \text{ in } 7 \text{ in } 20 \ \& + 4 \text{ in } 20 \ \& \\ + 2 \text{ in } 7 \text{ in } 3 \text{ in } 5 \ \& + 4 \text{ in } 3 \text{ in } 5 \end{array}$$

Exempla diuisionis vniuersalis.

$$\text{I}\ \begin{array}{c} 36 \\ 14 \\ \hline \frac{36}{14} \end{array} \qquad \text{II}\ \begin{array}{c} 36 \\ -14 \\ \hline \frac{36}{-14} \end{array} \qquad \text{III}\ \begin{array}{c} A \\ B \\ \hline \frac{A}{B} \end{array} \qquad \text{IV}\ \begin{array}{c} 23 - 4 \\ -22 + 9 \\ \hline \frac{23 - 4}{-22 + 9} \end{array}$$

$$\text{V}\ \begin{array}{c} A \text{ in } B + C \\ A - B \\ \hline \frac{A \text{ in } B + C}{A - B} \end{array} \qquad \text{VI}\ \begin{array}{c} 2 \text{ in } 7 \ \& + 4 \\ 20 \\ \hline \frac{2 \text{ in } 7 \ \& + 4}{20} \end{array} \qquad \text{VII}\ \begin{array}{l} 36 \\ 14 \\ \hline 36 \text{ per } 14 \end{array}$$

$$\text{VIII}\ \begin{array}{l} 36 \\ -14 \\ \hline 36 \text{ per } -14 \end{array} \qquad \text{IX}\ \begin{array}{l} A \\ B \\ \hline A \text{ per } B \end{array} \qquad \text{X}\ \begin{array}{l} 23 - 4 \\ -22 + 9 \\ \hline 23 - 4 \text{ per } -22 + 9 \end{array}$$

$$\text{XI}\ \begin{array}{l} A \text{ in } B + C \\ A - B \\ \hline A \text{ in } B + C \text{ per } A - B \end{array} \qquad \text{XII}\ \begin{array}{l} \frac{3}{4} \\ \frac{6}{8} \\ \hline \frac{3}{4} \text{ per } \frac{6}{8} \end{array} \qquad \text{XIII}\ \begin{array}{l} 2 \text{ in } 10 \ \& + 4 \\ 2 + 6 \\ \hline 2 \text{ in } 10 \text{ per } 2 + 6 \\ \& + 4 \text{ per } 2 + 6 \end{array}$$

$$\text{XIV}\ \begin{array}{c} 2 \text{ in } 10 \ \& + 4 \\ 2 \text{ in } 3 \ \& + 2 \\ \hline \frac{2 \text{ in } 10 \ \& + 4}{2 \text{ in } 3 \ \& + 2} \end{array}$$

CA-

CAPVT III.

De reductionibus longiorum ſcriptionum Logiſticarum, ad breuiores.

HOc capite afferimus remedium non leui incommodo, quod inuenitur in productis vniuerſalibus, & docemus, quomodo pro ſcriptione Logiſtica longiori, ſubſtitui poſſit alia ſcriptio Logiſtica breuior, ſed longiori æquiualens. Hanc doctrinam, in Longiſtica maximè vſitatam, diſtinguo in quinque partes. In prima parte, doceo plura eiuſdem numeri membra ſimilia, & ſolis ſignis † vel — connexa, reducere ad vnum membrum, ſiue numerum ſimplicem. In ſecunda parte, idem doceo circa membra vulgaria, aut denominata, quæ particula, in, connectuntur. In tertia parte, fracti numeri reducuntur ad non fractos. In quarta parte, numeri radicales reducuntur ad non radicales. Denique in quinta parte, agitur de qualibet ſcriptione Logiſtica, & docetur, quomodo per ea quæ in anterioribus partibus tradita ſunt, ſcriptio Logiſtica longior, reduci poſſit ad breuiorem, quæ longiori æquiualeat; totamque hanc doctrinam complector paucis problematibus, quæ videntur ſufficere ad præſens inſtitutum.

Si reflectas ad tres priores partes huius capitis, non difficulter intelliges, nos hic ab operationibus vniuerſalibus præcedenti capite traditis, deſcendere ad particulares, atque hoc capite, iterum proponi tres oparationes Logiſticas (nimirum, Additionem, Multiplicationem, ac diuiſionem) non tamen vniuerſales, ſed particulares, ſiue reſtrictas ad certos numeros. Etenim in prima huius capitis parte, docetur additio quorumlibet numerorum ſimilium. In ſecunda parte, traditur muliplicatio, in tertia diuiſio: vtraque tamen reſtricta eſt ad numeros vulgares, atque denominatos, non habentes dignitates diuerſas. De ſubtractione nuſquam hic agitur; etenim exiſtimaui ſuperfluum, proponere ſubtractionem, reſpondentem additioni traditæ in prima parte huius capitis. Si eam deſideras, prius circa propoſitos numeros adhibe ſubtractionem vniuerſalem, deinde reductionem in prima parte hic propoſitam, & inuenies reſiduum, quod haberetur ex ſubtractione, reſtricta ad numeros ſimiles; de qua non agitur, ne abſque neceſſitate, immo abſque vtilitate, præcepta multiplicentur. Supra memoratas operationes, ſub reductionum titulis propoſui, ſic enim melius exprimitur finis, ad quem ſeruiunt: & ſimul euitatur aliquod æquiuoca-

uocationis periculum, quod cauſari poſſet, à diuerſa earumdem vocum ſignificatione, ſi hic traditas operationes particulares, additionis, multiplicationis, atque diuiſionis nominibus exponerem, quæ etiam conueniunt operationibus particularibus, quæ in noſtra Logiſtica, ex vulgari Arithmetica ſupponuntur.

PARS PRIMA.

De reductionibus membrorum ſimilium, quæ ſolis ſignis † vel — connectuntur.

Problema I.

Data ſint duo membra ſimilia, quæ ſolis ſignis † vel — connectantur.

Oporteat membra illa ad vnum reducere.

Primo, ſi membra ſimilia, ſimilibus ſignis afficiantur, numeratorum ſumma, dabit nouum numeratorem: verum ſi data duo membra ſimilia, diſſimilibus ſignis afficiantur, numeratorum differentia dabit nouum numeratorem; vtroque caſu, nouus numerator affici debet ſigno quo maior ex datis numeratoribus afficitur; deinde nouo numeratori apponentur reliqua, quæ ſingulis membris datis, atque ſimilibus neceſſario ſunt communia, ſic enim habebitur intentum.

Ex. gr. 10 † 12 = 22. Item 10 — 12 = — 2. Item — 10 — 12 = — 22. Item 4 *a* 1 † 7 *a* 1 = 11 *a* 1. Item 4 *a* 1 — 7 *a* 1 = — 3 *a* 1. Item A † A = 2 A. Item 3 A — A = 2 A. Item 4 R 1 * 3 *a* 1 & † 7 R 1 * 3 *a* 1 = 11 R 1 * 3 *a* 1. Item 4 R 1 * 3 *a* 1 & — 7 R 1 * 3 *a* 1 = — 3 R 1 * 3 *a* 1.

Problema II.

Data ſint quotuis membra ſimilia, quæ ſolis ſignis † vel — connectantur.

Oporteat data membra ſimilia, ad vnum reducere.

Primo. Per Problema primum duo ex membris datis ad vnum nouum membrum reducantur. Deinde hoc nouum membrum, & aliud ex datis, ſimiliter ad vnum nouum membrum reuo-

reuocentur . Rursus membrum nouum vltimo inuentum, & aliud ex datis, reuocentur ad vnum; atque hanc operationem continuando, per omnia membra data, etiam omnia illa membra ad vnum reduces, datis omnibus membris æquiualens.

Ex. gr. Membra data similia, atque ad vnum reuocanda sint $4 + 7 + 8 - 12$. Itaque per Problema primum $4 + 7 = 11$: deinde $11 + 8 = 19$. Rursus $19 - 12 = 7$. Atque adeo $4 + 7 + 8 - 12 = 7$. Eodem prorsus modo satisfit Problemati, si dati numeri non sint vulgares, dummodo fuerint similes, vt supponitur in titulo Problematis; etenim pro solutione huius secundi Problematis nihil requiritur nisi successiuus, atque iteratus vsus primi Problematis.

PARS SECVNDA.

DE reductione membrorum, quæ particula in connectuntur, siue membra illa vulgaria sint, siue denominata, dummodo non habeant dignitates diuersas.

Nota, membra denominata, dici interse opposita, si in vno, dignitati appositus sit character oppositionis, sed non in altero; si vero, vel in neutro, vel in vtroque dignitati appositus sit character oppositionis, non erunt opposita inter se, licet singula sint opposita, si singula contineant characterem oppositionis, à quo opposita appellantur; aliud enim est membra data esse opposita, aliud esse inter se opposita.

Problema III.

DAta sint duo membra vulgaria, vel denominata, quæ particula *in* connectantur, & non habeant diuersam dignitatem.

Oporteat data membra ad vnum reducere.

Primo datorum membrorum numeratores multiplicati dant nouum numeratorem, qui affici debet signo +, si data duo membra similibus signis afficiantur; vel debet affici signo −, si data duo membra dissimilibus signis afficiantur. Secundo denominatorum summa, si membra interse opposita non fuerint, vel denominatorum differentia, si data membra interse opposita fuerint, dabit nouum denominatorem. Denique nouus numerator, ac

denominator, cum dignitate, inuenta in datis membris, conſtituent membrum quæſitum.

Notandum hic, inuentum nouum numerum debere habere characterem oppoſitionis, ſi maius ex datis membris hunc characterem habeant. Debet enim nouus numerus, quo ad characterem oppoſitionis conuenire cum maiori ex datis numeris, atque eodem modo habere, vel non habere, hunc characterem. Quis vero ex datis numeris maior ſit, aliundè ſciendum eſt. Cæterum maiorem appello cuius valor eſt maior.

Ex. gr. 4 *in* 5 = 20. Item 4 *in* − 5 = − 20. Item − 4 *in* − 5 = 20. Item 4 *in* 5 *a* 1 = 20 *a* 1. Item 4 *in* − 5 *a* 1 = − 20 *a* 1. Item 4 *a* 1 *in* 5 *a* 1 = 20 *a* 2. Item 4 *a* 1 *in* 5 *a* 2 = 20 *a* 3. Item 3 *a* 1 *in* 2 *a* 3 = 6 *a* 4. Item − 3 *a* 1 *in* 2 *a* 3 = − 6 *a* 4. Item − 3 *a* 1 *in* − 2 *a* 3 = 6 *a* 4.

Sequentia hic exempla, ſpectant ad notam in fine Problematis poſitam, in his exemplis, inuenies poſteriorem æquationis partem, habere duos numeros, diſiunctiuà particulà, vel, ſeparatos: ex quibus duobus numeris, vnus æquatur priori parti æquationis, nimirum ille, qui conuenit quo ad characterem oppoſitionis, cum maiori ex duobus datis membris: quod quamdiù aliunde neſcitur, non niſi ſub diſiunctione proponi poteſt æquatio, vt hic facimus.

Ex.gr. 2 *a* 1 *in* 20 *a* 02 = 40 *a* 1, vel 40 *a* 01. Item 2 *a* 3 *in* 20 *a* 01 = 40 *a* 02, vel 40 *a* 02. Item 2 *a* 01 *in* 20 *a* 2 = 40 *a* 1, vel 40 *a* 01. Item 2 *a* 1 *in* 20 *a* 01 = 40 *a* 00, vel 40 *a* 0.

In poſtrema parte huius vltimæ æquationis, diſiunctiua neceſſaria non eſt, quandoquidem 40 *a* 00, & 40 *a* 0, eidem vulgari numero 40 æquiualeant, atque adeo etiam interſe æquiualeant.

Nota. Quod in Problematis ſolutione dicitur de numeratoribus, etiam intelligi debet, de numeris vulgaribus, qui reuera ſunt numeratores, & præter numeratorem, nihil continent: carent enim dignitate, ac denominatore; ex quo fit, quod nullos vulgarium numerorum denominatores addendo, tamen addantur illi quos habent, nimirum nulli: & ſic fit quod præſcribitur in ſolutione Problematis, in qua, hoc loquendi modo vtor, vt ſolutio eadem, & vulgaribus, & denominatis membris conueniat; quæ ſingula ſatis patent ex allatis exemplis.

Pro-

Problema IV.

DAta sit scriptio Logistica longior, in qua inueniantur quotuis membra vulgaria, vel denominata, non habentia diuersam dignitatem, & data membra connexa sint particula, *in*.

Oporteat scriptionem reducere ad aliam, in qua, non inueniantur membra, particula *in* connexa.

Nota. In scriptione Logistica, particulis, *in*, simul connexa dicimus membra illa, quæ á particulis, *in*, significantur simul multiplicanda; quænam vero membra, à particulis in significentur simul multiplicanda, patet ex dictis cap. 1. & 2. vbi exposuimus, quid significent scriptiones. Supposito igitur, quod sciatur, quænam membra significentur simul multiplicanda esse, atque adeo, quænam membra particulis, *in*, simul connexa sint, in scriptione proposita, in hunc modum solues problema.

Quemadmodum problemate secundo, per successiuum, atque iteratum vsum primi problematis, membra omnia similia, & signis ✝ vel − simul connexa, reducuntur ad vnum membrum: ita hic, per successiuum, atque iteratum vsum problematis tertij, ad vnum membrum reducantur, omnia membra vulgaria, aut de nominata, non habentia diuersam dignitatem, sed simul connexa particula, *in*; sic enim habebitur quæsitum, in primo casu, hoc est, si membra omnia particulis, *in*, connexa, etiam simul connexa sint.

Si vero membra particulis, *in*, connexa, non omnia simul connexa sint, sed propositæ, scriptionis, membra quidem aliqua particula, *in*, simul connexa sint, sed tamen non connectantur cum alijs membris, eadem scriptione contentis, atque etiam particula, *in*, simul connexis, habebitur alius siue secundus casus: cui vt satisfiat, non vnum tantum membrum inueniendum est, sed tot diuersa membra inueniri debent, quot in proposita scriptione inueniuntur pluralitates membrorum, simul, particula, *in*, connexorum, non tamen connexorum cum alijs, atque hæc inuenta membra, successiuè scripta, satisfacient quæsito.

Pro exemplo primi casus, sit scriptio, 4 *in* 5 *in* 3 *in* 7, quam oporteat reducere. Per problema 3. primo 4 *in* 5 = 20. Deinde 20 *in* 3 = 60. Rursus 60 *in* 7 = 420. Quare, 4 *in* 5 *in* 3 *in* 7 = 420.

Pro exemplo secundi casus, proposita scriptio sit 4 ✝ 5 *in* 3.

Per

Per problema tertium, 4 *in* 3 = 12. Item 5 *in* 3 = 15. Quare 4 † 5 *in* 3 = 12 † 15. Rurſus propoſita ſcriptio ſit 4 † 5 *in* 3 † 7. Per problema tertium 4 *in* 3 = 12 : item 4 *in* 7 = 28 : item 5 *in* 3 = 15 : item 5 *in* 7 = 35 : quare 4 † 5 *in* 3 † 7 = 12 † 28 † 15 † 35.

In exemplis his propoſitis, adhibui membra vulgaria tantum, idque claritatis gratia: cæterum, ſiue membra propoſita in caſu problematis vulgaria fuerint, ſiue denominata, ſemper eodem modo illi ſatisfit, per ſucceſſiuum, atque iteratum vſum problematis tertij.

PARS TERTIA.

DE reductionibus fractorum numerorum ad non fractos, quando fractio conſtat ex membris vulgaribus, vel denominatis, non habentibus diuerſas dignitates.

Nota. Quomodo, vel quando numeri vulgares fracti reduci poſſint ad non fractos, docetur in vulgari Arithmetica, quæ hic ſupponitur: quare hic tantum agendum reſtat, de numeris fractis, qui conſtant ſaltem ex vno membro denominato.

Problema V.

DAta ſint duo membra, non habentia diuerſam dignitatem, quorum vnum ſit denominatum, alterum ſit vulgare, vel denominatum, atque hæc duo membra conſtituant fractum numerum.

Oporteat illum reducere ad numerum non fractum.

Primo. Numerator membri ſuperioris, diuiſus per numeratorem membri inferioris, dat nouum numeratorem, qui affici debet ſigno †, ſi data duo membra ſimilibus ſignis afficiantur: vel debet affici ſigno −, ſi data duo membra diſſimilibus ſignis afficiantur. Secundo nouum denominatorem dabit, differentia datorum denominatorum, ſi membra data non fuerint interſe oppoſita: vel ſumma denominatorum, ſi membra data fuerint interſe oppoſita. Denique inter nouum numeratorem, & nouum denominatorem, ponendo dignitatem inuentam in datis membris, habebitur quæſitus numerus: qui quoad characterem oppoſitionis, debet conuenire cum dato ſuperiori membro, præterquam in vno

caſu,

casu, nimirum, si duo data membra non fuerint interse opposita, & tamen inferior denominator, fuerit maior superiore denominatore.

Ex.gr. $\frac{12a3}{3a1} = 4a2$. Item $12a3$ *per* $3a1 = 4a2$. Item $12a3$ *per* $-3a1 = -4a2$. Item $12a3$ *per* $3 = 4a3$. Item $12a3$ *per* $3a3 = 4a0$. Item $3a3$ *per* $12a1 = \frac{3}{12}a2$. Item $3a3$ *per* $-12a1 = \frac{-3}{12}a2$. Item $\frac{12a1}{3a3} = 4a02$. Item $12a2$ *per* $-3a3 = -4a01$. Item $12a01$ *per* $3a3 = 4a04$. Item $12a3$ *per* $3a01 = 4a4$.

Nota, quod numerus nouus, atque non fractus, qui iuxta problema inuenitur, possit habere numeratorem fractum, vt patet ex allatis exemplis: sed tamen inuentus numerus, non erit fractus: quod tantum petitur in problemate.

Nota vlterius, quod in aliquibus exemplis, membra constituentia datum fractum numerum, sint connexa particula, *per*; in alijs dicta membra sint connexa lineola, quæ diuisum significat, etenim vtroque modo fractiones legitimè scribi, & has diuersas scriptiones, nihil diuersum significare, diximus in primo capite.

Problema VI.

DAta sint plura membra, non habentia diuersam dignitatem, quorum aliquod sit denominatum, reliqua vero sint vulgaria, vel denominata: atque hæc membra constituant fractum numerum.

Oporteat illum reducere ad numerum non fractum.

Hoc problema per quintum problema soluitur, quemadmodum problema quartum, soluitur per tertium; quod hic notasse, sufficere posset, ad eius solutionem. Verum, vt hoc ipsum melius intelligatur, ijsdem fere verbis, propono eius solutionem, quibus paulo ante proposui solutionem problematis quarti.

Nota. In scriptione Logistica, charactere diuisionis simul connexa dicimus membra illa, quæ per characterem diuisionis significantur diuidenda. Quænam vero membra per characterem diuisionis significentur diuidenda, patet ex dictis cap. 1. & 2. vbi exposuimus, quid significent scriptiones Logisticæ. Supposito

igitur

igitur quod sciatur quænam membra significentur diuidenda esse, atque adeo, quænam membra charactere diuisionis simul connexa sint, in scriptione proposita, in hunc modum solues problema.

Quemadmodum problemate secundo, per successiuum, atque iteratum vsum primi problematis, membra omnia similia, & signis † vel —, simul connexa, reducuntur ad vnum membrum: ita hic, per successiuum, atque iteratum vsum problematis quinti, ad vnum membrum reducantur, omnia membra vulgaria, aut denominata, non habentia diuersam dignitatem, sed simul connexa per characteres diuisionis: sic enim habebitur quæsitum, in primo casu, hoc est si membra omnia characteribus diuisionis connexa, etiam simul connexa sint.

Si vero membra characteribus diuisionis connexa, non omnia simul connexa sint, sed propositæ scriptionis, membra quidem aliqua, charactere diuisionis simul connectantur, sed tamen non connectantur cum alijs membris eadem scriptione contentis, atque etiam per characterem diuisionis simul connexis: habebitur alius, siue secundus casus, cui vt satisfiat, non vnum tantum membrum inueniendum est, sed tot diuersa membra inueniri debent; quot in proposita scriptione inueniuntur pluralitates membrorum characteribus diuisionis simul connexorum, & tamen non connexorum cum alijs: atque hæc inuenta membra successiue scripta satisfacient quæsito.

Pro exemplo primi casus, proposita scriptio sit 2 4 *per* 2 *per* 3 *per* 7. Itaque per problema quintum, 2 4 *per* 2 = 1 2: Item 1 2 *per* 3 = 4: Item 4 *per* 7 = $\frac{4}{7}$: quare 2 4 *per* 2 *per* 3 *per* 7 = $\frac{4}{7}$.

Pro exemplo secundi casus, proposita scriptio sit 2 4 † 1 2 *per* 3. Per ploblema quintum, 2 4 *per* 3 = 8. Item 1 2 *per* 3 = 4. Quare 2 4 † 1 2 *per* 3 = 8 † 4.

Nota. Si inferior ex datis numeris, constet ex pluribus membris, tunc plura illa membra prius reuocanda erunt ad vnum membrum: etenim quæ in proposito hic problemate tradidimus, atque facienda præscripsimus non facile exequeris, quando inferior ex datis numeris constat plusquam ex vno membro; quod verum esse reperies, si iuxta allatam problematis solutionem, tentes ad non fractum reducere, aliquem ex sequentibus fractis numeris nimirum $\frac{2\ 4}{4 † 2}$ vel $\frac{1\ 8}{9 - 6}$, vel $\frac{2\ 4 † 1\ 2}{4 † 2}$. Hos fractos numeros

meros facile reduces ad non fractos si prius plura inferioris numeri membra reducas ad vnum membrum. Etenim Ex. gr. quia per primam partem huius capitis $4 + 2 = 6$: & per tertiam partem $\frac{24}{6} = 4$: etiam $\frac{24}{4+2} = 4$. Similiter quia $9 - 6 = 3$: & insuper 18 *per* $3 = 6$: etiam 18 *per* $9 - 6 = 6$.

PARS QVARTA.

DE reductione numerorum radicalium, ad non radicales, quando numerus post asterismum scriptus est vulgaris.

Quomodo ex proposito numero vulgari qualibet radix extrahi possit, docetur in appendice huius primi libri, & hic, vel ex dicta appendice, vel aliundè cognitum supponitur.

Problema VII.

DAtus sit numerus radicalis, in quo numerus post asterismum scriptus sit vulgaris.

Oportet numerum radicalem datum, reducere ad non radicalem.

Primo. Ex numero post asterismum scripto talis radix extrahatur, qualis indicatur à denominatore propositi numeri radicalis. Deinde, inuenta radix, ducatur in numeratorem propositi numeri radicalis: sic enim prodibit numerus quæsitus, qui affici debet eodem signo, quo afficitur numerator propositi numeri radicalis. Ex. gr. Propositus numerus radicalis sit 5 R 2 * 8. Quia 1 R 2 * 8 = 2: & insuper 2 *in* 5 = 10: etiam 5 R 2 * 8 = 10. Similiter, si propositus numerus radicalis sit 7 R 1 * 1225. Quia 1 R 1 * 1225 = 35: & insuper 35 *in* 7 = 245: etiam 7 R 1 * 1225 = 245.

PARS QVINTA.

DE reductione scriptionis Logisticæ longioris, ad breuiorem.

Problema VIII.

PRoposita sit quæuis longior scriptio Logistica.

Oporteat illam reducere ad scriptionem breuiorem, longiori æquiualentem.

Nota. Quod septem præcedentia problemata, contineant magis commodas, atque vsitatas reductiones, seruientes in ordine ad solutionem huius problematis, in quo, non ago, nisi de illa breuitate, quæ per dicta problemata haberi potest.

Primo, si proposita scriptio Logistica, contineat membra, quæ sint numeri radicales, pro illis substituantur numeri non radicales, inuenti, vt docetur in quarta parte. Secundo, si proposita scriptio contineat membra fracta, pro illis integra substituantur, inuenta per tertiam partem. Tertio, si contineat membra connexa particula *in*, hæc membra, per secundam partem reducantur ad alia non connexa particula *in*, atque hæc pro prioribus substituantur. Quarto membra similia signis + vel − connexa, ad vnum membrum reducantur, vt docetur in prima parte, atque hæc pro prioribus substituatur. His ritè peractis, habebitur numerus breuior, siue breuissimus, qui in problemate petebatur.

Nota, nihil prorsus referre, an singula quæ in problematis solutione præscripsimus, eo quo illic proponuntur, an vero alio ordine peragantur.

CAPVT IV.

Anthithesis.

ANtithesis vocatur translatio alicuius quantitatis, ex vna parte æquationis, ad partem oppositam, sed sub contrario signo. Ex.gr. propositæ sint sequentes æquationes.

Prima æquatio. $40 - 7 = 8 + 25$.

Secunda æquatio. $40 - 7 - 25 = 8$.

Tertia æquatio. $40 = 8 + 25 + 7$.

Prima æquatio per Antithesim mutatur in æquationem secundam, sub contrario signo, transferendo numerum 25. Similiter per Antithesim transferendo numerum 7, æquatio prima mutatur in æquationem tertiam, in quibus æquationibus satis apparet

quo-

quomodo numerus, qui transfertur, ſub contrario ſigno transfer. tur; adeo, vt ſi ante translationem ſit poſitiuus, atque ſigno + affectus, poſt translationem fiat negatiuus, & afficiatur ſigno −; vel è contra, ſi ante translationem afficiatur ſigno − poſt translationem afficiatur ſigno +. Circa Antitheſim.

Notandum primò, quod numeri aliter, quam per ſigna + vel − connexi non niſi ſimul transferantur: tales ſunt numeri particula, *in*, connexi; item numeri connexi charactere diuiſionis; Item numeri radicales, qui numeri ex pluribus membris conſtant.

Notandum ſecundò. Quando per Antitheſim transferuntur numeri connexi particula *in*, vel charactere diuiſionis, vel numeri radicales, tunc tantum mutantur ſingula ſigna, quæ præcedunt characterem multiplicationis, aut diuiſionis, aut radicum, reliqua ſigna, immutata perſeuerant. Ex. gr. quia 6 & $+ 3$ in $4 = 18$ per Antitheſim etiam $6 = 18$ & $- 3$ in 4: item quia $\frac{12}{4} + 7 = 10$ per Antitheſim etiam $7 = 10 - \frac{12}{4:}$ item quia $9 + 3$ R $2 * 5 + 3 = 15$ per Antitheſim etiam $9 = 15 - 3$ R $2 * 5 + 3$.

Vſus Antitheſis.

QVandoquidem per Antitheſim non vitietur æquatio, vtilis eſt, atque ad hoc potiſſimum ſeruit, vt quando in aliqua, vel vtraque æquationis parte præmixti ſunt numeri cogniti cum incognitis, aut ſimiles cum diſſimilibus, tunc cogniti omnes, aut ſimiles, transferantur ad vnam æquationis partem, & reliqui omnes in parte oppoſita inueniantur, vt paſſim videre eſt in ſingulis ferè exemplis regulæ Logiſticæ, vel etiam in exemplis Libri ſequentis. Tota fundatur in tertio, & quarto axiomate cap. 8. prout hic propoſita eſt, ſeruit pro æquationibus conſiſtentibus inter quantitates, non vero pro æquationibus conſiſtentibus inter rationes.

CAPVT V.

De æquationis compoſitæ ad ſimpliciorem reductione.

AEquatio ſimplex appellatur, quæ conſiſtit inter duos numeros ſimplices, hoc eſt inter duos numeros, qui ſinguli conſtant ex vnico membro.

Æquatio compoſita dicitur, quæ conſiſtit inter duos numeros, quorum ſinguli non conſtant tantum ex vno membro.

Compoſitæ æquationis ad ſimplicem, vel ſimpliciorem reductio, de qua hic agimus, proponitur paucis problematibus, quorum frequentem vſum videre poteris in exemplis regulæ Logiſticæ, primum tamen frequentius adhibetur.

Problema I.

DAta ſit æquatio compoſita.

Oporteat illam reducere ad æquationem ſimpliciorem.

Primò. Omnes numeri vulgares, vel ad vulgares facile reducibiles (de quibus agitur in Nota ſecunda) per Antitheſim transferantur ad vnam æquationis partem, & reliqui omnes transferantur ad partem oppoſitam. Secundò per problema octauum cap. 3. numeri, qui in vtraque æquationis parte inueniuntur, ſi id fieri poſſit, reducantur ad breuiſſimos: ſic enim habebitur quæſitum.

Nota primò, quod hic præſcripſimus prius Antitheſim, deinde reductionem adhibendam, non ita intelligendum eſt quaſi oppoſitum non liceat: etenim non raró præſtat prius numeros reducere, & poſtea per Antitheſim ordinare.

Nota ſecundò per numeros facilè reducibiles ad vulgares hic intelligimus primò numeros radicales, qui poſt aſteriſmum non habent niſi numerum vulgarem: hi enim, ad vulgares numeros reducuntur per problema ſeptimum cap. 3. Secundò intelligimus numeros denominatos, qui minorem habent denominatorem, quando in nulla æquationis parte inueniuntur numeri vulgares, de quorum numerorum ad vulgares reductione, agit problema ſubſequens.

Pro-

Problema II.

DAta sit æquatio consistens inter solos numeros denominatos habentes eandem dignitatem.

Oporteat illam reducere ad aliam æquationem, in qua inueniatur aliquis numerus vulgaris.

Primo obserua, quis inter omnes denominatores minor sit. Secundò hunc minorem denominatorem à singulis denominatoribus auferendo efficies, vt numerus, qui prius minorem habebat denominatorem retineat o pro denominatore, atque adeo vulgari numero æquiualeat, vel omittendo in illo dignitatem, & denominatorem vulgaris fiat. Ex. gr. per ea, quæ hic præscripsimus si $4\,a\,3 + 6\,a\,2 = 28\,a\,1$ etiam $4\,a\,2 + 6\,a\,1 = 28$. Rursus si $5\,a\,3 = 10\,a\,2$, etiam $5\,a\,1 = 10$.

Problema III.

DAta sit æquatio inter numerum denominatum oppositum, & vulgarem.

Oporteat illam reducere ad aliam æquationem, consistentem inter denominatum, & vulgarem.

Primò. Si numerus vulgaris datus, non est fractus, interposita lineola quæ diuisum significat, subscribatur illi vulgaris vnitas, vt sic fiat fractus. Deinde ad tres numeros, quorum primus sit numerator fractionis vulgaris, secundus sit denominator fractionis vulgaris, tertius sit numerator numeri denominati oppositi, ac dati: ad hos inquam tres numeros, per regulam auream, inueniatur quartus proportionalis: hic erit valor vnius dignitatis, habentis eumdem denominatorem, ac dignitatem, cum dato numero denominato opposito. Ex.gr. proposita æquatio sit $3\,a\,o.2 = \frac{18}{24}$. Fiat vt 18 ad 24, ita 3 ad 4: tunc $1\,a\,2 = 4$. Similiter si proposita æquatio sit $3\,a\,o\,2 = 12$. Fiat vt 12 ad 1, ita 3 ad $\frac{3}{12}$: tunc $1\,a\,2 = \frac{3}{12}$.

Problema IV.

DAta ſit æquatio inter numerum integrum, & numerum fra-ctum.

Oporteat illam reuocare ad æquationem inter integrum, & integrum.

Numerus integer ſit A, fractus conſtet ex numeris B, & C, atque adeo A $= \frac{B}{C}$ tunc etiam A *in* B = C: item A *in* C = B: atque vtroque modo æquatio, quæ erat inter integrum, & fractum reducitur ad æquationem inter duos integros, quorum vnus, per particulam *in* compoſitus, per dicta in parte ſecunda cap. 3. reduci poterit ad alium, non compoſitum per particulam *in*.

Nota, nihil referre, an numeri A,B,C, de quibus hic egimus, ſinguli ſint ſimplices, an aliqui, vel ſinguli ſint compoſiti.

Problema V.

SIt æquatio inter numerum radicalem habentem poſt aſteriſmum numerum denominatum, & inter alium numerum vulgarem.

Oporteat illam reducere ad æquationem inter numerum denominatum, & vulgarem.

Primò numerus vulgaris diuidatur per numeratorem numeri radicalis. Secundò productum ex hac diuiſione, toties in ſe ductum, quot vnitates inueniuntur in denominatore numeri radicalis, dabit numerum vulgarem, cui æquabitur numerus denominatus poſt aſteriſmum ſcriptus. Ex. gr. 5 R 3 * 4 *a* 2 = 10: igitur 10 diuiſum per 5 dabit 2, & numerus 2 tertiò in ſe ductus dat 16, quare 4 *a* 2 = 16.

Problema VI.

SIt æquatio inter numerum radicalem habentem poſt aſteriſmum numerum denominatum, & inter numerum denominatum.

Oporteat illā reducere ad æquationē inter numeros denominatos.

Huius

Huius problematis ſolutio non differt à ſolutione præcedentis problematis, niſi quod hic circa numerum denominatum poſt æquationem ſcriptum, fiant, quæ prius facienda diximus circa numerum vulgarem poſt æquationem ſcriptum.

Primò itaque adhibendo operationes vniuerſales numerus denominatus poſt æquationem ſcriptus, diuidatur per numeratorem numeri radicalis; ac deinde toties in ſe ductus, quot vnitates continentur in denominatore numeri radicalis, dabit productum, cui æquabitur numerus denominatus poſt aſteriſmum ſcriptus.

Ex. gr. poſito quod 5 R 3 * 4 *a* 2 = 5 *a* 1; tunc 5 *a* 1 *per* 5 = 1 *a* 1: & 1 *a* 1, tertio in ſe ductum, dat 1 *a* 4: quare etiam 1 *a* 4 = 4 *a* 2: & ſic propoſita prius æquatio, in qua ponebatur 5 R 3 * 4 *a* 2 = 5 *a* 1, eſt reducta ad ſequentem 1 *a* 4 = 4 *a* 2: quæ æquatio per problema 2. vlterius reduci poteſt ad ſequentem 1 *a* 2 = 4. Rurſus poſito quod 3 R 4 * 9 *a* 3 = 3 *a* 1: tunc 3 *a* 1 *per* 3, dat 1 *a* 1: & 1 *a* 1 quater in ſe ductum, dat 1 *a* 5: ex quo habetur quod 1 *a* 5 = 9 *a* 3; hinc vlterius, per ſecundum problema inferri poteſt, quod 1 *a* 2 = 9. Rurſus poſito quod 2 R 1 * 8 *a* 3 = 4 *a* 2: tunc 4 *a* 2 *per* 2, dant 2 *a* 2: & etiam 2 *a* 2 ſemel in ſe ducta, dant 4 *a* 4: quare 4 *a* 4 = 8 *a* 3; & per problema ſecundum inferri poterit, quod 4 *a* 1 = 8.

CAPVT VI.

De reſolutione, ſiue expoſitione numerorum indeterminatorum.

RESoluere numerum indeterminatum, nihil eſt aliud, quam inuenire eius valorem; ſiue aſſignare numerum determinatum, qui ex vi hypotheſis æqualis ſit numero indeterminato.

Problema I.

DAtus ſit aliquis numerus ſimplex, cuius valor cognoſcatur.

Oporteat inuenire valorem, cuiuslibet alterius numeri ſimplicis, qui dato ſimilis ſit.

Ad tres numeros, quorum primus ſit numerator numeri dati; ſecundus ſit valor cognitus, aut eius numerator, tertius ſit numerator

rator numeri cuius valor deſideratur, per regulam auream, inuentus quartus proportionalis; dabit valorem quæſitum, aut valoris numeratorem.

Ex. gr. poſito quod 7 *a* 2 = 63; oporteat inuenire valorem numeri 3 *a* 2. Fiat vt 7 *ad* 63, ita 3 *ad* alium numerum, qui erit 27: quare 3 *a* 2 = 27. Similiter poſito quod 22 *a* 1 = 66; oporteat inuenire valorem numeri 1 *a* 1. Fiat vt 22 *ad* 66, ita 1 *a* 1 ad alium numerum, qui erit 3: quare 1 *a* 1 = 3. Rurſus poſito quod 3 R 2 * 4 *a* 1 = 6; oporteat inuenire valorem numeri 7 R 2 * 4 *a* 1. Fiat vt 3 *ad* 6, ita 7 ad alium numerum, qui erit 14: quare 7 R 2 * 4 *a* 1 = 14.

Nota. Si valor cognitus ſit numerus vulgaris, inuenitur alius valor, qui etiam ſit numerus vulgaris, vt in primo, & ſecundo exemplo. Si vero valor cognitus eſt numerus radicalis, in regula aurea non adhibetur niſi numerator numeri radicalis, & per regulam auream inuenitur numerator numeri radicalis, priori radicali ſimilis, qui ſit valor quæſitus, vt in tertio exemplo.

Problema II.

Datus ſit aliquis numerus denominatus ſimplex cuius valor cognoſcatur.

Oporteat inuenire valorem numeri denominati, qui à dato differat, ſed non niſi quo ad oppoſitionis characterem.

Ad tres numeros, quorum primus ſit valor cognitus: ſecundus ſit, numerator dati numeri denominati: tertius ſit, æqualis ſecundo: per regulam auream inuentus quartus proportionalis, dabit valorem quæſitum.

Ex. g. poſito quod 3 *a* 2 = 27: oporteat inuenire valorem numeri 3 *a o* 2. Per regulam auream fiat, vt 27 *ad* 3, ita 3 ad alium numerum, qui erit $\frac{9}{27}$: quare 3 *a o* 2 = $\frac{9}{27}$. Similiter poſito quod 4 *a* 1 = 2: oporteat inuenire valorem numeri 4 *a o* 1. Fiat vt 2 *ad* 4, ita 4 ad alium numerum, qui erit 8: quare 4 *a o* 1 = 8. Rurſus poſito quod 3 *a o* 2 = $\frac{1}{3}$: oporteat inuenire valorem 3 *a* 2. Fiat vt $\frac{1}{3}$ ad 3, ita 3 ad alium numerum, qui erit 27: quare 3 *a* 2 = 27.

Problema III.

DAtus sit aliquis numerus denominatus cuius valor cognoscatur.

Oporteat inuenire valorem vnius dignitatis primæ eiusdem classis, non oppositæ dignitati numeri dati.

Primò. Si numerus datus pro numeratore non habeat vnitatem, per problema primum inueniatur valor numeri, qui dato similis sit, & pro numeratore habeat vnitatem; deinde scribatur numerus radicalis, qui pro numeratore habeat vnitatem, & pro denominatore habeat numerum vnitate deficientem, à denominatore dati numeri denominati, atque post asterismum ponatur valor primo loco hic inuentus. Denique numerus radicalis scriptus, vt iam diximus, per problema 7. cap. 3, reuocetur ad vulgarem, hic erit valor quæsitus.

Ex. gr. posito quod 4 *a* 3 = 1 0 8, inueniendus sit valor numeri 1 *a* 1; itaque primo per problema primum inuenitur, quod 1 *a* 3 = 2 7: deinde scribitur sequens radicalis numerus 1 R 2 * 2 7. Tertio per problema 7. cap. 3. inuenitur quod 1 R 2 * 2 7 = 3: ex quo concluditur, quod 1 *a* 1 = 3.

Problema IV.

DAta sit aliqua dignitas prima, cuius valor cognoscatur.

Oporteat inuenire valorem cuiuslibet alterius numeri denominati eiusdem classis, cuius dignitas non sit opposita dignitati datæ.

Primo à denominatore numeri denominati cuius valor quæritur, auferatur vnitas, & quot in residuo supererunt vnitates, toties valor cognitus in seipsum ducatur; denique hoc productum ducatur in numeratorem numeri propositi, sic enim prodibit valor quæsitus.

Ex.gr. supposito quod 1 *a* 1 = 3; oporteat inuenire valorem numeri 1 5 *a* 3: itaque primo ex denominatore 3 auferendo vnitatem, remanet 2: & datus valor 3 bis in se ductus, dat 2 7: denique 2 7 in 1 5, dat 405: quare 1 5 *a* 3 = 4 0 5. Similiter posito quod 1 *a* 1 = 2; oporteat inuenire valorem numeri 5 *a* 4; itaque primo à denominatore 4 auferendo vnitatem remanet 3, &

valor cognitus 2, tertio in ſe ductus, dat 1 6; denique 1 6 *in* 5, dat 8 0; quare 5 *a* 4 = 8 0. Rurſus poſito quod 1 *a* 1 = 2; oporteat inuenire valorem 1 *a* 2; itaque primo à denominatore 2, auferendo vnitatem, remanet vnitas, & valor cognitus 2, ſemel in ſe ductus, dat 4; denique 4 *in* 1, dat 4; quare 1 *a* 2 = 4.

Nota. Si in caſu tertij, vel quarti problematis, numerus cuius valor quæritur haberet dignitatem, oppoſitam dignitati, quæ inuenitur in numero denominato cognito: præter ſolutiones in dictis problematibus allatas, adhibendum foret ſecundum problema, vt ſatis patet.

CAPVT VII.

De reſolutione Æquationum.

LEgitimæ æquationis inuentio, atque reſolutio partes ſunt præcipuæ, ex quibus conſtat Logiſticæ regula nono capite tradenda, pro cuius vſu, vltra ea, quæ hactenus expoſita ſunt, requiritur æquationum reſolutio, quæ difficultates habet Geometra dignas, & ſuperatis hactenus difficultatibus longo interuallo maiores, atque adeo arduas, vt eas hactenus à nemine ſuperatas inueniam. Singula, quæ in hoc genere à varijs ingenioſè excogitata ſunt, longum foret hic referre, & parum vtile, immo noxium in ordine ad finem hic mihi propoſitum. Quare prætermiſſis difficilioribus æquationum reſolutionibus, faciliores aliquot propono, quarum vltima, ſi prioribus duabus ſimilis foret, præter hic poſitas nulla foret deſiderabilis, quippe ad quaſcumque æquationes reſoluendas ſufficiunt tres illæ quæ hic proponuntur.

Reſoluere æquationem nihil aliud eſt, quam ex cognito valore vnius ex duobus numeris, inter quos conſiſtit æquatio, inuenire valorem cuiuslibet numeri, qui ſit ſimilis, vel eiuſdem claſſis, vel ſaltem eiuſdem ordinis cum aliquo numero, qui in altera æquationis parte inuenitur. Ex. gr. ex eo, quod 7 *a* 2 = 6 3, inuenire, quod 4 *a* 2 = 36: eſt inuenire valorem numeri ſimilis; cum 7 *a* 2, & 4 *a* 2 ſint ſimiles. Ex eadem æquatione inuenire, quod 4 *a* 1 = 1 2 eſt inuenire valorem numeri eiuſdem claſſis: quandoquidem 7 *a* 2, & 4 *a* 1 ſint eiuſdem claſſis, licet non ſint ſimiles. Denique ex eadem æquatione inuenire, quod 2 R 1 * 1 *a* 2 = 6 eſt inuenire valorem numeri eiuſdem ordinis tametſi

neque

neque ſimiles ſint, neque eiuſdem claſſis.

Æquatio legitima dicitur, quæ determinat valorem numeri ex ſe indeterminati. Ex.gr. 7 *a* 2, & ſimiliter alij numeri denominati ex ſe ſunt indeterminati, atque indifferentes ad ſignificandum quodlibet productum ex aliquo numero in ſe ducto: per hoc tamen, quod 7 *a* 2 = 6 3, determinationem accipit, atque amiſſa priori indifferentia, determinatur ad ſignificandum numerum æqualem numero 63, qui vnicus eſt.

Æquatio vana, atque illegitima appellatur, quæ non determinat valorem numeri ex ſe indeterminati. Ex. gr. 7 *a* 2 = 7 *a* 2. Item 7 *a* 2 = 4 *b* 1. Item 1 R 2 * 1 *a* 3 = 1 *a* 1, ſunt æquationes illegitimæ, ac vanæ.

Prima reſolutio.

EX æquatione legitima conſiſtente inter numeros ſimplices, quorum vnus vulgaris ſit, inuenire valorem numeri, qui ſit ſimilis alicui numero æquatione contento.

Quod hic proponitur, non differt ab eo, quod docetur problemate primo cap. præcedentis: etenim ex duobus numeris, inter quos conſiſtit æquatio, de qua hic agitur, vulgaris numerus alterius valor eſt, quod hic notaſſe ſatis eſt, vt per prædictum problema ſatisfiat quæſito.

Reſolutio ſecunda.

EX æquatione legitima conſiſtente inter numeros ſimplices, quorum vnus vulgaris ſit, inuenire valorem alicuius numeri, qui non ſit ſimilis, ſed tamen ſit eiuſdem claſſis, ac ordinis, cum numero, qui in altera æquationis parte inuenitur.

Ex duobus numeris, inter quos conſiſtit æquatio, de qua hic agitur, vulgaris numerus, eſt valor numeri, qui in oppoſita æquationis parte inuenitur. Quare per problema 3. cap. præcedentis inueniri poterit valor vnitatis, ſimilis numero, cuius valor inquiritur, atque ex cognito vnitatis valore, per problema 1. cap. præcedentis, inuenietur valor numeri, qui deſideratur.

Reſolutio tertia.

Ex quacunque æquatione legitima, inuenire valorem numeri eiuſdem claſſis, & ordinis, cum aliquo numero contento in vna æquationis parte.

Si fieri poſſit, propoſita æquatio, per dicta cap. 5. reducatur ad æquationem conſiſtentem inter numeros ſimplices, quorum alter vulgaris ſit, atque hanc æquationem ſimplicem reſoluendo per primam, aut ſecundam reſolutionem, inuenies valorem numeri quæſiti.

Si fieri non poſſit talis reductio, ſequens praxis ad deſideratum finem vtilis eſſe poterit. Primò ſupponendo, quod valor vnius primæ dignitatis, ſit certus aliquis numerus vulgaris, omnes numeri indeterminati in æquatione contenti, reſoluantur in vulgares, quos pro indeterminatis, quibus æquiualent, ſubſtituendo, examinabis, an nouæ huius æquationis oppoſitæ partes inter ſe æquentur, vel non æquentur. Si primum, valor vnius primæ dignitatis aſſumptus erit verus, atque legitimus: Si ſecundum, non erit verus, atque adeo aſſumpto alio eius valore. reſumenda eſt iam facta operatio, donec inueniatur verus valor vnius primæ dignitatis, quo valore cognito per dicta cap. 6. inuenietur valor numeri deſideratus.

Pro exemplo praxis de qua agitur in hac tertia reſolutione, propoſita, ſit æquatio, quæ habetur in ſecunda ſolutione problem. 2. cap. 2. libri ſecundi, quæ eſt talis, $12a1 - 1a2 = 20$. Ex qua æquatione, inueniendus eſt valor $1a1$; in quem finem, aſſumo pro libitu aliquem numerum. Ex. gr. 4, & ſupponendo quod $1a1 = 4$, infero per dicta cap. 6, quod $12a1 = 48$. Item quod $1a2 = 16$. Ergo $12a1 - 1a2 = 48 - 16$. Ergo $12a1 - 1a2 = 32$: quæ æquatio non eſt conformis æquationi propoſitæ; in qua numerus vulgaris erat 20, hic vero eſt 32: ex quo colligo, numerum 4. prius aſſumptum pro valore $1a1$, eſſe nimis magnum. Quare aſſumendo numerum minorem, ſuppono. Ex. gr. quod $1a1 = 2$; & reiterando diſcurſum prius inſtitutum infero, quod $12a1 = 24$. Item quod $1a2 = 4$, ergo $12a1 - 1a2 = 24 - 4$. Ergo $12a1 - 1a2 = 20$. Quæ æquatio eſt conformis æquationi prius propoſitæ; quandoquidem igitur facta ſuppoſitione quod $1a1 = 2$, ſequatur quod $12a1 - 1a2 = 20$; etiam ex eo quod in propoſita æquatione $12a1 - 1a2$

1 *a* 2 = 2 0, ſequitur, quod 1 *a* 1 = 2 : atque hoc argumento ſequitur quod inueniendus valor 1 *a* 1, ſit 2.

Scholium.

PRima & ſecunda reſolutio hoc capite propoſita differunt à tertia ſolutione, quemadmodum in noſtris Geometriæ elementis propoſitorum problematum ſolutiones differunt à ſolutionibus praxium ibidem propoſitarum; hoc eſt quemadmodum Geometrica problematis ſolutio differt à ſolutione mechanica : & ſi placeat prioribus reſolutionibus ſimiles reſolutiones Arithmeticas appellare, atque hac appellatione illas diſtinguere à tertia, quæ tentando abſoluitur, atque illam vocare mæchanicam, rem præſtaret æterna laude digniſſimam, qui pro mechanica reſolutione hìc tertio loco allata, Arithmeticam ſubſtitueret, atque inueniret modum vniuerſalem Arithmetice ſoluendi quaſcumque æquationes. Extant paſſim modi quamplurimi, quibus Arithmeticè reſoluuntur æquationæs ab illis diuerſæ, quas hìc Arithmeticè docemus reſoluere, & huiuſmodi reſolutionibus libri integri impleti circumferuntur : nolui tamen plures hìc congerere, de hac re, ſuo tempore pluribus acturus, ſi methodus noſtra probetur ab ijs, qui ſublimiori Arithmetica delectantur, hìc mihi alium ſcopum non præfixeram, quàm Matheſeos candidatos inſtruere, ad quem finem non parum conducunt breuitas, claritas, atque facilitas; multum autem inter ſe differunt tyrones inſtruere, & cum Arithmeticis conuerſari, quod enim hos iuuat, atque delectat, prioribus non rarò nocet, atque eos in deſperationem inducit.

CAPVT VIII.

Nonnulla principia magis neceſſaria pro vſu regulæ Logiſticæ.

LOgiſticæ principia appellantur, illa omnia, quæ à Logiſtica ſupponuntur, atque aſſumuntur, ad inferendas concluſiones; hæc principia diſtinguuntur in definitiones, & axiomata. pari modo pro vſu regulæ Logiſticæ requiſita principia, ſunt definitiones, atque veritates, quæ in vſu huius regulæ præſupponuntur : ex his principijs magis neceſſaria, propono præſenti capite, quod in tres partes diuido. Prima

pars

pars complectitur aliquas definitiones, ſiue terminorum expoſitiones, magis neceſſarias, atque etiam Logiſticæ magis proprias, ita vt, ex vulgari Arithmetica, aut Geometriæ elementis, commodè ſupponi non poſſint: dictas definitiones breuitatis ſtudio minus exactè hic propono, magis accurata de illis tractatio ſpectat ad librum tertium, neque illa requiritur ad vſum regulæ Logiſticæ. Secunda pars continet aliquot axiomata. Tertia pars proponit pauca aliqua Theoremata, ſine vllis demonſtrationibus propoſita, ſed libro tertio legitimè demonſtranda.

PARS PRIMA.

Definitiones ſiue expoſitiones terminorum.

I VOx numerus, hic ità adhibetur, vt non minus ſignificet vnitatem, quam vnitatum pluralitatem.

II Dignitas appellatur, quantitas ſignificata per aliquam Alphabeti litteram, vel littera repræſentans aliquam quantitatem. Excipe tamen litteram R quando aſſumitur ad ſignificandam radicem, vt diximus ſupra in primo capite.

Hinc patet quod ſequens ſcriptio, 1 *a* 1, rectè exprimatur, ſiue dicatur vnum A primum, ſiue dicatur vna dignitas prima: vtroque enim caſu, diuerſis vocibus, idem ſignificatur. Scriptionem legendi, prior modus, mihi vſitatior eſt, & vox dignitas, tunc potiſſimum vſui èſt, quando eſt aliquid aſſerendum de ipſa littera, aut quantitate quam ſignificat, & dignitas appellatur.

Vbi aduertendum, quod dignitatum identitas, vel diuerſitas, non dependeat niſi ab identitàte, vel diuerſitate hypotheſis, ex vi cuius littera ſignificat quantitatem. Hinc facta hypotheſi, quod littera A, ſignificet certam aliquam quantitatem, ſiue determinatam, ſiue indeterminatam: manente hac hypotheſi, numeri omnes, qui continent litteram A, dicuntur habere eandem dignitatem. Sic manente eadem hypotheſi, de ſignificatione litteræ A, ſequentes numeri omnes dicuntur habere eamdem dignitatem, nimirum 1 *a* 1. Item 1 *a* 2. Item 4 *a* 3. Item 2 *a* 0. Item 1 *a* 0 1. Item 7 *a* 0 3. Item A. Item A *q*. Item 3 A: quamuis enim ex propoſitis hic numeris, plerique habeant dignitates diuerſi nominis, ſiue dignitates diuerſimodè denominatas: tamen dignitates diuerſas non habent, ſed omnes habent dignitatem eandem: in

in ſingulis enim inuenitur eadem littera A, quæ ex vi hypotheſis ſemper idem ſignificat, atque adeo eandem dignitatem repræſentat.

III Dignitas oppoſita, vocatur, dignitas quæ habet characterem oppoſitionis. Cæterum dignitas oppoſita, ſignificat productum ex vnitate vulgari, diuiſa per dignitatem.

IV Radix, eſt quantitas quæ in ſe ducta producit illud, cuius radix dicitur. Ex.gr. radix numeri 4, eſt numerus 2, qui ſemel inſe ductus producit quatuor. Similiter numerus 2, eſt radix numeri 8, quia numerus 2, bis inſe ductus, producit 8. pari modo numerus 2, eſt radix numeri 16, quem producit, tertio in ſe ductus.

V Numerator vocatur quod numerat vnitates, & exprimitur per voces, vnum, duo, tria, quatuor, &c. hinc numeri immediatè verſus leuam appoſiti alicui dignitati, vocantur numeratores talium dignitatum. Similiter numerus immediatè verſus leuam appoſitus radici, dicitur numerator radicis. Ex. gr. in hac ſcriptione 7 *a* 1 numerus 7 eſt numerator.

VI Denominator appellatur, quod denominat quantitatem. Dignitatibus, & radicibus immediatè verſus dexteram apponitur denominator, qui, ſi numerus eſt, exprimitur per voces primus, ſecundus, tertius, quartus. In fractionibus, ipſius fractionis denominator ſcribitur infra lineolam, quæ diuiſum ſignificat, vel poſt particulam, *per*, quando hæc particula adhibetur. Præterea etiam ſubinde dignitatis denominator littera minori exprimitur. Ex.gr. A *q*, quod legitur A quadratum, in qua ſcriptione, *q*, eſt denominator, littera quidem expreſſus, ſed planè æquiualens numero 2, pro denominatore eidem litteræ appoſito: quandoquidem A 2, & A *q*, ſcriptiones ſint, quæ diuerſis quidem vocibus enunciantur, ſed tamen idem ſignificant; vt patebit ex ijs, quæ paulo poſt dicemus de ſignificatione denominatorum, qui per voces primus, ſecundus, tertius, exprimuntur.

VII Numerus denominatus, eſt complexum ex numeratore, dignitate, & denominatore. Ex gr. 1 *a* 1, item 2 *a* 1, item 7 *a* 2, item 4 *b* 1, ſinguli ſunt numeri denominati. Aduertendum hic, quod dignitati, non ſemper expreſsè apponatur numerator, vel denominator, quoties tamen dignitas, alium, aut numeratorem, aut denominatorem, expreſsè appoſitum non habet, cenſetur habere vnitatem pro numeratore, aut denominatore, non expreſsè poſito; quare non minus A, B, C ſunt numeri denominati quam 1 *a* 1, 1 *b* 1, 1 *c* 1. immo priores, poſterioribus planè æquiualent.

8 Nu-

VIII Numerus radicalis, eſt complexum ex numeratore, radice, denominatore, & numero poſt aſteriſmum ſcripto. Ex. gr. ſequens ſcriptio 2 R 1 * 9, exhibet numerum radicalem, in quo numerator eſt 2, radix eſt R, denominator eſt 1, numerus poſt aſteriſmum ſcriptus eſt 9.

Ad plenam intelligentiam numerorum, quos hic diximus denominatos, aut radicales appellari, exponendum nobis remanet, quid ſignificent horum numerorum denominatores, expreſſi, per voces primus, ſecuudus, tertius, &c. ſiue quid ſint dignitates primæ, ſecundæ, &c. item radices primæ, ſecundæ; vt hoc intelligatur, aduertendum numerorum denominatorum, atque radicalium denominatores, ſimilibus quidem notis Arithmeticis ſcribi, & ſimilibus vocibus exprimi, ſed tamen diuerſam ſignificationem habere. Prius itaque propono quid ſint dignitates primæ, ſecundæ, tertiæ, &c. deinde explico, quid ſint radices primæ, ſecundæ, &c.

IX Dignitas prima, idem ſignificat, ac dignitas aliqua, ſiue quantitas per aliquam litteram indicata. Iam verò productum ex prima dignitate, ſemel in ſe ducta, vocatur dignitas ſecunda. Productum ex prima dignitate, bis in ſe ducta, vocatur dignitas tertia productum ex prima dignitate, tertio in ſe ducta, vocatur dignitas quarta, & ſic de cæteris; ex quo fit, quod licet ſequentes ſcriptiones enuncientur, vt cap. 1. diximus, tamen quidquid ſit de diuerſa enunciatione, quæ illis conuenit, idem planè ſignificant, illæ, quæ hic dicuntur æquales: A 2 = A *in* A. Item A 3 = A *in* A *in* A. Item A 4 = A *in* A *in* A *in* A. Item 1 *a* 2 = 1 *a* 1 *in* 1 *a* 1. Item 1 *a* 3 = 1 *a* 1 *in* 1 *a* 1 *in* 1 *a* 1. In his ſcriptionibus aduertere licet, quod denominator dignitatis compendioſè indicet quoties ſcribenda eſſet dignitas, interpoſita ſemper particula *in*, vt haberetur ſcriptio longior; ſine vllo denominatore expreſsè poſito, æquiualens breuiori, denominatorem expreſsè appoſitum habenti; ſiue quot dignitates primæ requirantur, quæ ſucceſſiuè multiplicatæ, dent productum à denominatore breuius indicatum. Ex.gr. vt habeatur productum à denominatore tria indicatum, atque ex prima dignitate ortum, tertiò ſucceſſiuè ſcribi debet dignitas prima.

X Dignitas nulla, idem ſignificat, ac vnitas vulgaris. Hinc tres vnitates nullæ, ſunt tres vnitates vulgares. Item 4 *a* 0 = 4. Item 7 *a* 0 = 7. Vbi vlterius aduerti poteſt, quod dignitas nulla, & dignitas oppoſita nulla, idem ſignificent: adeo vt 3 *a* 0 = 3 *a o* 0. Item 7 *a* 0 = 7 *a o* 0.

XI Dignitas oppoſita prima, ſignificat productum ex vnitate vulga-

vulgari, diuiſa per dignitatem primam. Dignitas oppoſita ſecunda, ſignificat productum ex vnitate vulgari, diuiſa per dignitatem ſecundam. Dignitas oppoſita tertia, ſignificat productum ex vnitate vulgari, diuiſa per dignitatem tertiam. Atque ita de cæteris.

XII Radix prima alicuius numeri A, eſt numerus, qui ſemel in ſe ductus, producit numerum A:. Radix ſecunda numeri A, eſt numerus, qui bis in ſe ductus, producit numerum A. Radix tertia numeri A, eſt numerus, qui ter in ſe ductus, producit numerum A. Vbi aduertere licet, quod denominator radicis, indicet quoties radix in ſe duci debeat, vt producat illud, cuius talis radix eſſe dicitur, qualis à denominatore ſignificatur.

XIII Numerus vulgaris appellatur, qui ſine dignitate, aut radice, exprimitur per notas in practica Arithmetica vſitatas. Ex. gr. 1, 2, 7, 20, 100. ſinguli ſunt numeri vulgares, & ſimiliter reliqui omnes, ſiue integri, ſiue fracti, qui per ſolas Arithmeticæ decem notas exprimuntur, ſunt numeri vulgares.

XIV Valor alicuius numeri appellatur, numerus vulgaris, cui æquiualet talis numerus. Ex.gr. ſuppoſito quod littera A, aſſumpta ſit ad ſignificandum numerum vulgarem *3*, tunc *3* erit valor 1 *a* 1. Item *6* erit valor 2 *a* 1. Item *9* erit valor *3a*1. Item *9* erit valor 1*a*2. Item 27 erit valor 1 *a 3*. Item *3* erit valor 1 R 1 * *3 a* 1. Item *6* erit valor 2 R 1 * *3 a* 1;& generaliter, numerus vulgaris, dicitur valor illius numeri, cui æquatur: ex quo fit quod numerus vulgaris etiam ſui ipſius valor ſit, quia ſibi ipſi æquatur.

XV Numerus determinatus, eſt numerus cuius valor eſt cognitus. Hinc omnes numeri vulgares ſunt determinati. Præterea omnes numeri tam denominati, quam radicales ſunt determinati, quando ſcitur numerus vulgaris cui æquantur.

XVI Numerus indeterminatus, eſt numerus cuius valor cognitus non eſt, quare omnes numeri denominati, & radicales ſunt indeterminati, quamdiu neſcitur numerus vulgaris cui æquantur.

XVII Numerus ſimplex dicitur, qui non inuoluit characterem compoſitionis, vbi per characterem compoſitionis intelligo quemlibet ex ſequentibus tribus †, —, *in*, quando numeris interponuntur. Ex. gr. ſequentes numeri ſimplices ſunt, 4, 100, *3 a* 1; 20*a* 2, 4R 1 * 1 *a* 2, $\frac{10}{22}$, $\frac{7}{1a1}$ item † 4, item — 4, item † 1 *a* 2, &c.

XVIII Numerus compoſitus appellatur, qui inuoluit aliquem characterem compoſitionis. Ex. gr. ſequentes numeri ſunt compoſiti

4 † 3. Item 2 – 14. Item 3 – 7 † 4. Item 4 *in* 27. Item 2 *a* 2 † 3. Item 2 *a* 1 *in* 3. Item 4 R 1 * 1 *a* 2 † 7. Item 2 – 4 R 1 * 1 *a* 2.

XIX Numerus integer dicitur, qui non inuoluit characterem diuisionis, hoc est lineolam, quæ diuisum significat, vel particulam *per*. Ex.gr. 7. Item 2 *a* 1. Item 10 *a* 3. Item 4 R 1 * 7 *a* 1, singuli sunt numeri integri.

XX Numerus fractus dicitur, qui inuoluit characterem diuisionis. Ex. gr. $\frac{3}{4}$. Item $\frac{1}{10}$. $\frac{-10}{1}$. Item $\frac{1a1}{4}$. Item 1 *per* 10. Item 1 *a* 1 *per* 3. Singuli sunt numeri fracti.

XXI Numerus simplex positiuus dicitur, qui afficitur signo †: negatiuus dicitur, qui afficitur signo –: quæ signa non afficiunt nisi numeros simplices quibus immediatè præponuntur. Vbi aduertendum, negatiuis numeris semper expressè præponi signum –. Verum positiuis non semper expressè præponitur signum †: omnes enim numeri simplices quibus expressè nullum signum præponitur, censentur habere signum †, & sunt positiui.

XXII Numeri similes dicuntur, qui non differunt nisi quo ad numeratorem, & signum. Ex. gr. omnes vulgares numeri sunt similes inter se; item omnes denominati, qui non habent diuersam dignitatem, aut denominatorem, & insuper non differunt quo ad characterem oppositionis, sunt inter se similes. Item omnes radicales sunt inter se similes, si non habeant diuersum denominatorem, aut numerum post asterismum scriptum.

XXIII Numeri dissimiles appellantur, qui differunt amplius quam quo ad numeratorem, & signum. Ex.gr. nulli numeri vulgares inter se sunt dissimiles. Numeri denominati inter se sunt dissimiles, si habeant, aut diuersam dignitatem, aut diuersum denominatorem, aut differant quo ad characterem oppositionis. radicales inter se erunt dissimiles, si habeant diuersum denominatorem, vel numerum post asterismum scriptum. Denique omnes numeri diuersæ classis, sunt dissimiles.

XXIV Numeros distinguo in tres classes, primæ classis numeri sunt vulgares. Secundæ classis numeri sunt denominati. Denique radicales sunt tertiæ classis. Ex quo satis patet quid sint numeri eiusdem, vel diuersæ classis.

XXV Numeri eiusdem ordinis appellantur, quorum valor, easdem vnitates significat, & consequenter numeri diuersi ordinis sunt, quorum valor diuersas vnitates significat. Ex. gr. numerus 4, erit eiusdem ordinis cum numero 10, si vterque significet vni-

vnitates abſtractas, vel aureos, vel domos, &c. ſi vero 4 ſignificet aureos, & 10 ſignificet domos, erunt diuerſi ordinis. Quoties ſermo eſt de diuerſis numeris, & expreſsè oppoſitum non dicitur, ſupponuntur eſſe eiuſdem ordinis.

XXVI Æquatio appellatur, complexum ex partibus quæ inter ſe æquales affirmantur. Si partes quæ inter ſe æquales affirmantur, ſint numeri, vel quantitates continuæ, erit æquatio conſiſtens inter quantitates abſolutas: ſi partes quæ æquales affirmantur, ſint rationes, erit æquatio conſiſtens inter rationes. Ex.gr. *3 a* 1 † 7 = 10, eſt æquatio inter quantitates abſolutas conſiſtens. Verum ſequens æquatio *3 ad 6* = *7 ad* 14, eſt æquatio conſiſtens inter rationes. Vtraq; æquatio erit ſimplex, ſi nulla pars inuoluat characterem compoſitionis; vel erit compoſita, ſi inuoluat characterem compoſitionis; item erit magis, vel minus ſimplex, pro vt inuoluet pauciores, vel plures characteres compoſitionis, vel etiam diuiſionis.

Præter propoſitas hic definitiones ſiue expoſitiones terminorum magis propriè ſpectantium ad noſtram Logiſticam, alia nonnulla ſparſim proponuntur in reliquis capitibus, vt illa inueniantur ſufficiet conſulere indicem.

PARS SECVNDA.

Axiomata.

I TOtum æquatur ſuis partibus ſimul ſumptis.

Hoc axioma in ſenſu in quo à Mathematicis intelligitur, eſt manifeſtum ex terminis: hoc eſt, ſi ſignificet aggregatum quantitatum habere magnitudinem, æqualem, magnitudini partium, ex quarum aggregatione conſtituitur. Cæterum tota ratio compoſita, poteſt eſſe maior, vel etiam minor, vna parte componente: vt oſtendimus quæſtione 4 cap. 2. elementorum. Item totus numeri valor poteſt eſſe minor, valore partium, diuerſo tantum loco, aut ordine poſitarum. Verum de huiuſmodi monitionibus ſolicitus non ſum, quandoquidem eas paſſim neglectas videam ab alys Mathematicis.

II Quæ eidem tertio æquantur, etiam inter ſe ſunt æqualia.
Ex.gr. ſi A = B, & inſuper C = B: etiam A = C.

III Si æqualibus addantur æqualia, producta erunt æqualia.
Ex.gr. ſi A = B, & inſuper C = D, etiam A † C = B † D.

IV Si ab æqualibus æqualia auferantur, reſidua, ſiue producta

erunt æqualia.

Ex. gr. ſi $A = B$, & inſuper $C = D$: etiam $A - C = B - D$.

V Si æqualia multiplicentur per æqualia, producta erunt æqualia.

Ex. gr. ſi $A = B$: etiam A *in* $C = B$ *in* C. Similiter ſi $A + B = C$: etiam $A + B$ *in* $D = C$ *in* D.

VI Si æqualia per æqualia diuidantur, producta erunt æqualia.

Ex. gr. Si $A = B$; etiam $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$. Item ſi $A + B = C$: etiam $\frac{A + B}{D} = \frac{C}{D}$.

VII Si A *ad* $B = C$ *ad* B; etiam $A = C$. Et viciſſim ſi $A = C$: etiam A *ad* $B = C$ *ad* B.

VIII Si A *ad* $B = C$ *ad* D, legitimè ſequetur.

Primò. Inuertendo, B *ad* $A = D$ *ad* C.

Secundò. Permutando, A *ad* $C = B$ *ad* D.

Tertiò. Componendo, $A + B$ *ad* $B = C + D$ *ad* D.

Quartò. Diuidendo, $A - B$ *ad* $B = C - D$ *ad* D.

Quintò. A in X *ad* B in $X = C$ *ad* D, vel etiam A *ad* B.

Sexto $\frac{A}{X}$ *ad* $\frac{B}{X} = C$ *ad* D, vel etiam A *ad* B.

IX Qualeſcunque fuerint quantitates A,B,C, dummodo non ſint quantitates diuerſi generis. Proportio rationis A ad C ad rationem B ad C, erit æqualis rationi A ad B.

Hoc axioma eſt 14 in noſtris Geometriæ elementis: in quibus pluribus expono, quæ ad proportionum, ſiue rationum intelligentiam requiruntur.

Circa ſeptimum, & octauum axioma aduertendum, quòd ſingula contineant varias partes, & complectantur modos argumentandi circa rationes maximè vſitatos. Ex his argumentandi modis, aliqui habent nomen proprium, quod ipſis appoſui; alij non habent nomen proprium; diuerſi non ſunt ab octo prioribus propoſitionibus cap. 2. noſtrorum elementorum, quo loco, non alia de cauſa inter theoremata numerantur, niſi quia ab Euclide tanquam theoremata fuerunt propoſita; cæterum reuera ſunt axiomata, & prædicto loco à nobis potius exponuntur, quam demonſtrentur.

PARS TERTIA.

Theorema I.

QValeſcunque fuerint quantitates A,B,C,D,E,F, ita tamen, vt A *ad* B = D *ad* E, & inſuper B *ad* C = E *ad* F.

Dico ex æquo, etiam A *ad* C = D *ad* F.

Hic modus argumentandi, vocatur ex æquo; & in noſtris elementis proponitur, prop. 9. cap. 2.

Theorema II.

QValeſcunque fuerint quantitates A,B,C,D,Z. Ita tamen, vt B *ad* Z = C *ad* D.

Dico A *in* C *ad* B *in* D = A *ad* Z.

Hoc theorema, continet prop. 2. cap. 4. elementorum.

Theorema III.

QValeſcunque fuerint quantitates A, B, C.

Dico A *ad* B = C *ad* $\frac{C \textit{ in } B}{A}$.

Ab hoc theoremate, immediatè dependet regula, quæ vulgo aurea vocatur, quæque frequentiſſimè recurrit, in vſu regulæ Logiſticæ.

Theorema IV.

QValeſcunque fuerint quantitates A,B,C,D.

Dico primo ſi A *ad* B = C *ad* D, etiam A *in* D = B *in* C.

Dico ſecundo ſi A *in* D = B *in* C, etiam A *ad* B = C *ad* D.

Hoc theorema continet prop. 3. 4. cap. 4. elementorum.

Theorema V.

QValeſcunque fuerint quantitates A,B,D.

Dico primo. Si A *ad* B = B *ad* D, etiam A *in* D = B *q*.

Dico ſecundò. Si A *in* D = B *q*, etiam A *ad* B = B *ad* D.

Hoc theorema continet propoſitionem quintam capitis quarti Elementorum, & continetur Theoremate quarto, à quo non differt niſi quod hic bis adhibeatur quantitas B, quæ proinde æquiualet quantitatibus B & C, quando illæ quantitates inter ſe æquantur, quem caſum non excludit quartum Theorema, ſed ſicut hunc caſum includit, ſic etiam includit, ac continet præſens Theorema.

Theorema VI.

QValeſcunque fuerint quantitates A,B,C,D.

Dico primo, ſi A *ad* B = C *ad* D; etiam A = $\frac{B \text{ in } C}{D}$

Dico ſecundo, ſi A = $\frac{B \text{ in } C}{D}$; etiam A *ad* B = C *ad* D.

Ex. gr. quia 2 *ad* 6 = 3 *ad* 9. etiam 2 = 3 *in* 6 *per* 9. Item quia 2 = 3 *in* 6 *per* 9: etiam 2 *ad* 6 = 3 *ad* 9.

Theorema VII.

QValeſcunque fuerint quantitates B,C,D.

Dico $\frac{B}{D}$ *ad* $\frac{B}{C}$ = C *ad* D.

Ex. gr. qualeſcunque ſint numeri 12, 8, 4. Verum erit quod 12 *per* 4, *ad* 12 *per* 8 = 8 *ad* 4. *Non erit inutile, hoc theorema conferre, cum aſſertione ſexta axiomatis octaui.*

Theorema VIII.

QValeſcunque fuerint quantitates A,B,C.

Dico primo, ſi A *in* B $=$ C: etiam $\frac{C}{B} = A$. Item $\frac{C}{A} = B$.

Dico ſecundo, ſi $\frac{C}{B} = A$, vel $\frac{C}{A} = B$, etiam A *in* B $=$ C.

Ex. gr. quia 8 *in* 2 $=$ 16: etiam 16 *per* 2 $=$ 8. Item 16 *per* 8 $=$ 2. Rurſus quia verum eſt quod 16 *per* 2 $=$ 8 vel quod 16 *per* 8 $=$ 2; neceſſario ſequitur, quod 8 *in* 2 $=$ 16.

CAPVT IX.

Regula Logiſticæ, ſiue compendium illius viæ, qua Logiſtica pergit ad problematum ſolutionem.

PRimò. Expendendo ſtatum propoſitæ quæſtionis, obſeruetur aliquis numerus, qui talis ſit, vt ex eius cognitione dependeat ſolutio quæſtionis, atque pro hoc numero incognito aſſumatur aliquis numerus indeterminatus, qui vocetur numerus aſſumptus, de quo plura videri poſſunt in nota poſita in fine regulæ.

Secundò. Quæſtionis propoſitum exercendo per numerum aſſumptum, inuenienda eſt æquatio, in cuius vna parte inueniatur numerus aſſumptus, vel alius ex ipſo productus, & in altera parte inueniatur numerus vulgaris, vel alius ad vulgarem reducibilis, vel ſaltem numerus determinatus, in quem finem ſeruit doctrina cap. 1. & 2.

Tertiò inuenta æquatio, ſi ſatis ſimplex non ſit, reuocanda eſt ad ſimpliciorem; in quem finem ſeruiunt dicta capitibus ſuperioribus.

Quartò reſoluendo ſimpliciorem illam æquationem, inueniatur valor numeri aſſumpti, vt docetur cap. 7. cognito hoc valore numeri aſſumpti, facile ſoluetur quæſtio propoſita; quæ ex aſſum-

assumpti numeri cognitione supponebatur dependere.

Nota, in primo propositæ regulæ præscripto dici, pro numero incognito assumendum esse aliquem numerum indeterminatum; quæri igitur posset, an pro illo numero incognito licitum sit assumere quemlibet ex numeris indeterminatis. Respondeo id licitum esse, & nullum dari numerum indeterminatum, qui non possit assumi pro numero incognito: etenim independenter ab aliqua præcedente hypothesi singuli numeri indeterminati, etiam indeterminatè significant quemlibet numerum, atque adeo indeterminatè significant prædictum numerum incognitum; qui licet incognitus sit, tamen est aliquis numerus, atque adeo pro ipso in prima hypothesi substitui potest quilibet numerus indeterminatus; quod licet verum sit, tamen ex numeris indeterminatis, alij, alijs vtilius assumuntur, pro numero incognito; pro quo vtilius substituuntur illi, qui in sequentibus operationibus commodiùs adhibentur, atque hæc commoditas vnica causa est, quod inter numeros indeterminatos detur aliqua electio, & in prima hypotesi potius expediat vnum quam alterum assumere pro numero incognito. Vt singula hæc breuius, & clarius pateant, vnam hic quæstionem, & plures eius solutiones affero, in quibus & regulæ, & eorum, quæ hic notauimus exempla habes.

Quæstio.

VRbis præsidium milites continet, quorum numerus ignoratur, hoc tamen scitur, quod si præsidium tertia sui parte augeretur, & insuper centum accederent, haberet milites 3000.

Quæritur quis sit numerus militum, qui præsidio continentur.

Prima solutio.

PRimò iuxta primum regulæ præscriptum considerando statum propositæ quæstionis, facilè aduertes, quod ex cognitione numeri indicantis tertiam partem præsidij, dependeat solutio quæstionis propositæ. Quare pro tertia parte præsidij assumo numerum indeterminatum 1 *a* 1, facta hac hypothesi, quod nimirum 1 *a* 1 sit tertia pars præsidij, iuxta secundum regulæ præscriptum discurrendo, infero, ergo præsidium erit 3 *a* 1, ex quo vlterius concludo, quod 3 *a* 1 † 1 *a* 1 † 100 = 3000: atque ita habeo

habeo æquationem, quæ satis simplex non est, cum ad simpliciorem reduci possit, quare iuxta tertium regulæ præscriptum eam prius per antithesim reduco ad sequentem *3 a* 1 † 1 *a* 1 = 3000 – 100: & iterum hanc æquationem per dicta cap. 5. reduco ad sequentem 4 *a* 1 = 2900, quæ æquatio simplex est. Denique iuxta quartum regulæ præscriptum, resoluendo hanc simplicem æquationem infero: ergo *3 a* 1 = 2175. Ex quo infero, præsidio contentos milites esse 2175: etenim ex vi assumptæ hypothesis præsidium æquatur, siue est *3 a* 1, sed etiam *3 a* 1 = 2175: ergo præsidium æquatur 2175.

Secunda solutio.

Sit tertia pars præsidij 20 *a* 1: igitur præsidium erit 60 *a* 1: igitur 60 *a* 1 † 20 *a* 1 † 100 = 3000: ergo per antithesim, 60 *a* 1 † 20 *a* 1 = 3000 – 100: ergo per cap. 5. etiam 80 *a* 1 = 2900: ergo resoluendo hanc simplicem æquationem 60 *a* 1 = 2175: ergo iterum, vt prius vrbis præsidium æquatur 2175.

Tertia solutio.

Tertia pars præsidij sit *3 a 5*: ergo totum præsidium erit *9 a 5*: ergo *9 a 5* † *3 a 5* † 100 = 3000: ergo per antithesim, *9 a 5* † *3 a 5* = 3000 – 100: ergo per cap. 5. etiam 12 *a 5* = 2900: ergo resoluendo hanc æquationem iterum inuenies, quod *9 a* 1 = 2175; atque adeo totum præsidium æquari 2175.

Quarta solutio.

Tertia pars præsidij sit 7 R 4 * *3 a 2*: ergo totum præsidium erit 21 R 4 * *3 a 2*: ergo etiam 21 R 4 * *3 a 2* & † 7 R 4 * *3 a 2*, & † 100 = 3000: ergo per antithesim 21 R 4 * *3 a 2* & † 7 R 4 * *3 a 2* = 3000 – 100: ergo per cap. 5, etiam 28 R 4 * *3 a 2* = 2900: ergo resoluendo hanc æquationem inuenies, quod 21 R 4 * *3 a 2* = 2175: atque adeo totum præsidium æquari 2175.

Quinta solutio.

TOtum præsidium sit 1 a 1: ergo tertia pars præsidij erit $\frac{1}{3}$ a 1: ergo 1 a 1 † $\frac{1}{3}$ a 1 † 100 = 3000: ergo per antithesim 1 a 1 † $\frac{1}{3}$ a 1 = 3000 – 100: ergo per cap. 5. etiam $\frac{4}{3}$ a 1 = 2900; resoluendo hanc æquationem inuenies quod 1 a 1 = 2175; atque adeo totum præsidium æquari, 2175.

Sexta solutio.

TOtum præsidium sit 3 a 1: ergo tertia pars præsidij erit 1 a 1: ergo 3 a 1 †. 1 a 1 † 100 = 3000: ergo per antithesim 4 a 1 = 2900: ergo 3 a 1 = 2175: ergo vrbis præsidium æquatur 2175.

Circa diuersas eiusdem quæstionis solutiones hic propositas.

Nota primò quomodo in quatuor primis solutionibus, diuersi numeri indeterminati assumantur, pro tertia parte præsidij, & tamen ex singulis, eodem discursu, eadem solutio inferatur.

Nota secundò primam solutionem tribus subsequentibus ex hoc capite commodiorem esse, quod prima solutio paucioribus, vel saltem minoribus numeris absoluatur.

Nota tertiò quod quemadmodum in quatuor primis solutionibus pro libitu assumptus fuit numerus indeterminatus pro tertia parte præsidij, ita in quinta, & sexta solutione assumatur pro libitu numerus, qui totum præsidium repræsentet.

Nota quartò, quod sexta solutio, quinta solutione commodior sit ex hoc capite, quia solis numeris integris absoluitur, quinta numeros fractos inuoluit.

Nota quintò, quod licet inter quatuor primas solutiones commodior sit illa, in qua pro numero ignoto assumitur 1 a 1; vt dicitur in secunda nota, tamen inter duas postremas solutiones, non est commodior illa, in qua pro numero ignoto assumitur 1 a 1, sed altera, in qua pro numero ignoto assumitur 3 a 1, vt dicitur in Nota 4.

Eiusdem quæstionis diuersæ solutiones hic propositæ, atque illis appositæ notæ sufficient ad intelligentiam regulæ Logisticæ, reliqua, quæ ad expeditum regulæ vsum requiri possunt, non præceptis, sed exercitio, ac vsu disci debent, in quem finem non parum prodesse consueuit, ad manum habere diuersas quæstiones legitimè propositas, ac solutas; huiusmodi quæstiones continet subsequens liber. Antequam tamen huic primo libro finem imponam placet hic animi gratia aliam, siue septimam præcedentis quæstionis solutionem addere, assumendo pro tertia præsidij parte numerum indeterminatum sola littera maiuscula expressum, & deinde in appendice paucis docere cuiuslibet radicis inuentionem.

Septima solutio.

Tertia pars præsidij sit A: ergo totum præsidium erit 3 A: ergo 4 A † 100 ⩦ 3000: ergo per antithesim 4 A ⩦ 3000 − 100: ergo 4 A ⩦ 2900: ergo 3 A ⩦ 2175: ergo præsidium æquatur 2175.

APPENDIX

In qua docetur modus extrahendi quamlibet radicem, ex quouis proposito numero vulgari.

In Logistica non infrequenter requiritur, inuentio radicis propositi numeri vulgaris, qua de re etiam agere consueuerunt practicæ Arithmeticæ scriptores, apud quos vsitatum est, quadratas ac cubicas radices appellare, quas in nostra Logistica primas, ac secundas radices nominamus; de reliquis radicibus agere non consueuerunt: nobis tamen, reliquarum radicum inuentio, etiam necessaria est; quare hic paucis agimus de quarumlibet radicum inuentione, & quamuis vnico, sed longiori problemate doceri possit inuentio cuiuslibet radicis, tamen, maioris claritatis gratia, prius quatuor diuersis problematibus exponere volui singula, quæ ad cuiuslibet radicis inuentionem necessaria sunt, ac deinde quinto problemate complecti modum, atque ordinem, quo præcedentia quatuor problemata adhibenda sint, vt cuiusuis numeri vulgaris desiderata qualibet radix inueniri possit. Ante hæc problemata,

propono aliquam tabellam, necnon aliquas ſcriptiones Logiſticas, quas formulas appello, hæc enim duo in problematibus ſupponuntur.

TABELLA.

Valor	1	2	3	4	5	6
R1*	1	4	9	16	25	36
R2*	1	8	27	64	125	216
R3*	1	16	81	256	625	1296
R4*	1	32	243	1024	3125	7776
R5*	1	64	729	4096	15625	46656
R6*	1	128	2187	16384	78125	279936
R7*	1	256	6561	65536	390625	1679616
R8*	1	512	19683	262144	1953125	10077696

Altera pars Tabellæ.

valor	7	8	9
R 1 *	49	64	81
R 2 *	343	512	729
R 3 *	2401	4096	6561
R 4 *	16807	32768	59049
R 5 *	117649	262144	531441
R 6 *	823543	2097152	4782969
R 7 *	5764801	16777216	43046721
R 8 *	40353607	134217728	387420489

Tabella ideò tantum in duas partes diuiſa proponitur, quia id exigebant paginæ anguſtiæ. De tabellæ & ſequentium formularum vſu, agitur in ſubſequentibus problematibus.

FOR-

FORMVLÆ.

Pro R 1. 20 A *in* B & † B 2.

Pro R 2. 300 A 2 *in* B & † 30 A *in* B 2 & † B 3.

Pro R 3. 4000 A 3 *in* B & † 600 A 2 *in* B 2 & † 40 A *in* B 3 & † B 4.

Pro R 4. 50000 A 4 *in* B & † 10000 A 3 *in* B 2 & † 1000 A 2 *in* B 3 & † 50 A *in* B 4 & † B 5.

Pro R 5. 600000 A 5 *in* B & † 150000 A 4 *in* B 2 & † 20000 A 3 *in* B 3 & † 1500 A 2 *in* B 4 & † 60 A *in* B 5 & † B 6.

Problema I.

NVmerum vulgarem propositum diuidere in membra, pro extractione radicis desideratæ.

Incipiendo à dextera parte, versus sinistram, numerus propositus diuidatur in membra, quæ singula vnam notam amplius contineant, quam vnitates contineantur in denominatore radicis desideratæ. Sic enim habebitur quæsitum.

Nota hic primò quod propositi numeri in membra diuisio absoluatur per virgulas. Secundo quod illud membrum vocetur primum, quod est magis sinistrum, atque hoc primum membrum potest reliquis pauciores notas continere, sed non plures; reliqua vero membra singula æquè multas notas continere debent. Ex. gr. duas si prima radix extrahenda sit. Vel tres, si secunda radix inquiratur. Vel quatuor, si tertia radix desideretur, &c.

Problema II.

INuenire primam notam post lunulam scribendam; & insuper numerum diuidendum pro secundæ notæ inuentione.

Vsitatum est post lunulam paulatim colligere desideratæ radicis notas: vbi tot notæ colligendæ sunt, quot membra continet propositus numerus, iuxta primum problema diuisus. Hoc prænotato.

Primò. Inter numeros, qui in tabella subsequuntur asterismum,

mum,

mum, cui præponitur denominator radicis desideratæ, inueniatur numerus æqualis, vel si hic desit, inueniatur alius proximè minor primo membro numeri propositi, & iuxta primum problema diuisi in membra. Secundò, inuento numero supernè respondens valor, erit prima nota post lunulam scribenda. Tertio, inuentus, vt diximus in tabella numerus, à primo membro auferatur, atque residuo secundum membrum successiuè adscribatur, cum quo constituet numerum diuidendum, qui quæritur.

Problema III.

INuenire valorem probabilem litteræ B.

Primò. Pro valore litteræ A assumendo numerum hactenus scriptum post lunulam, per dicta cap. 6. inueniatur valor omnium numerorum denominatorum habentium dignitatem A, atque contentorum formula quæ inseruit radici desideratæ. Secundò inuenti valores, in vnam summam colligantur, atque inueniatur quoties hæc summa contineatur in numero diuidendo proximè inuento: numerus siue nota Arithmetica, hoc indicans, erit valor probabilis literæ B.

Problema IV.

EX numero diuidendo proximè inuento, inuenire notam scribendam post lunulam: & insuper nouum numerum diuidendum pro alterius notæ inuentione.

Primò. Pro valore litteræ A, assumendo totum numerum scriptum post lunulam: & insuper pro valore litteræ B assumendo valorem probabilem inuentum per problema 3, per dicta cap. 6, inueniatur valor totius formulæ, quæ seruit pro radice desiderata, atque obseruetur, an inuentus formulæ valor sit maior numero diuidendo, vel non sit maior: secundò si inuentus formulæ valor est maior numero diuidendo, pro valore litteræ B assumendus erit valor vnitate deficiens à priori eius valore, atque supposito hoc nouo valore litteræ B, rursus inquirendus erit valor formulæ, vt iam dictum est; & hæc operatio iteranda erit, donec inueniatur valor formulæ, qui non sit maior numero diuidendo. Denique vbi inuentus fuerit valor formulæ, qui non sit maior numero diuidendo, hic formulæ valor auferetur à numero diuidendo,

do, & residuo successiuè adscribetur subsequens membrum numeri propositi, sic enim habebitur nouus numerus diuidendus: & valor litteræ B vltimo assumptus, erit nota post lunulam scribenda.

Nota. Si valor probabilis per problema 3. inuentus, sit o: tunc post lunulam o scribitur, & à numero diuidendo nihil aufertur, sed tantum successiuè illi adscribendo subsequens membrum, habebitur nouus numerus diuidendus.

Problema V.

EX proposito quouis numero vulgari extrahere desideratam radicem quamcunque.

Primò per problema primum propositus numerus Vulgaris in membra diuidatur. Secundò per problema 2. inueniatur prima nota post lunulam scribenda, & etiam numerus diuidendus ex quo haberi debet secunda nota. Tertio, prius per probl. 3. inuento valore probabili litteræ B, per problema 4. inueniatur noua nota post lunulam scribenda, & insuper nouus numerus diuidendus, ex quo haberi debet subsequens nota post lunulam scribenda. Denique tertio loco præscripta hic operatio, toties iteretur, quot membra primum subsequuntur in numero proposito: sic enim post lunulam colliges tot notas, quot sunt membra in numero proposito; quæ notæ simul, constituent radicem quæsitam, nimirum proximam integro numero vulgari exprimibilem; si magis exactam desideres, consule Scholium in fine huius Appendicis.

Nota, Radicis extractionem quam hic docuimus, ita vniuersalem esse, vt cuiuscunque radicis extractionem amplectatur; ex formulis tamen, quas problema supponit, non nisi quinque diuersas hic annotauimus. Libro tertio proponam facilem modum, quo efformantur, vt si quis plures desideret eas inuenire possit.

Exemplum I.

PRopositus sit numerus 522729. ex quo radix prima extrahenda sit.

Primò iuxta problema primum propositus numerus in membra diuisus, erit 52, 27, 29. Et singula membra duas notas continebunt: primum membrum erit 52: secundum 27: tertium 29.

Secun-

Secundò, iuxta problema 2. quia in tabella è regione R 1, non inuenitur primum membrum 52, hoc membro proximè minor numerus accipitur, qui est 49: cui supernè respondet valor 7: quare nota 7 scribitur primo loco post lunulam: ipse vero numerus 49, ablatus ex 52, dat pro residuo 3; adeoque numero 3, apponendo successiue subsequens membrum 27, habetur 327; qui erit numerus diuidendus pro secunda nota inuenienda.

Tertiò iuxta problema 3. quia numerus hactenus post lunulam scriptus est 7, etiam A ⩵ 7; quare 20 A ⩵ 140, qui numerus tantum bis continetur in numero diuidendo 3 2 7, quare valor probabilis B erit 2; & iuxta problema 4 supposito quod A ⩵ 7, & quod B ⩵ 2, etiam formula 2 0 A *in* B *&* † B 2 ⩵ 1 4 0 *in* 2 *&* † 4 ♎ 2 8 4: qui numerus non est maior numero diuidendo 3 2 7, quare ex ipso sublatus, relinquit pro residuo 4 3: cui successiuè adscribendo subsequens membrum 2 9, habetur numerus 4 3 2 9, qui erit numerus diuidendus pro tertia nota inuenienda: & valor litteræ B, qui est 2, scribitur post lunulam; vbi iam erit 72.

Quartò, quia numerus hactenus post lunulam scriptus est 7 2, iuxta problema 3, etiam A ⩵ 7 2, quare 2 0 A ⩵ 1 4 40; & quia hic numerus tantum ter continetur in numero diuidendo 4 3 2 9, valor probabilis B erit 3; & iuxta problema 4. supponendo quod A ⩵ 7 2, & insuper quod B ⩵ 3, etiam formula 2 0 A *in* B *&* † B 2 ⩵ 1 4 4 0 *in* 3 *&* † 9 ♎ 4 3 2 9: qui numerus non est maior numero diuidendo, sed ipsi æqualis: facta igitur subtractione, nihil remanet: neque etiam remanet aliud membrum numeri propositi addendum pro nouo numero diuidendo, atque adeo operatio erit finita, & post lunulam scribendo valorem B, nimirum 3, habebitur post lunulam numerus 7 2 3, qui erit radix prima numeri propositi 5 2 2 7 2 9: adeoque inuentum quod petebatur. Eritque verum quod 1 R. 1 * 5 2 2 7 2 9 ⩵ 7 2 3.

Exemplum II.

Propositus sit numerus 3 7 7 9 3 3 0 6 7. Ex quo radix secunda sit extrahenda.

Primò. iuxta problema 1. numerus propositus in membra diuisus erit 3 7 7, 9 3 3, 0 6 7. Singula membra tres notas continebunt. Primum erit 3 7 7. Secundum 9 3 3. Tertium 0 6 7.

Secundò, iuxta problema 2, quia in tabella è regione R 2, quæ extrahenda proponitur, non inuenietur primum membrum

377,

377, hoc membro proximè minor numerus accipitur, qui est 343, cui supernè respondet valor 7: quare nota 7 scribitur post lunulam, & numerus 343 ablatus à primo membro 377, dat pro residuo 34: cui successiuè adscribendo subsequens membrum 933, habetur 34933: qui erit numerus diuidendus pro secunda nota inuenienda.

Tertiò. Iuxta problema 3, quia numerus hactenus post lunulam scriptus est 7, etiam A = 7; quare 300 A 2 † 30 A = 14700 † 210 ♎ 14910: qui numerus non nisi bis continetur in numero diuidendo 34933; quare valor probabilis B erit 2, & iuxta problema 4, formula 300 A 2 *in* B & † 30 A *in* B 2 & † B 3 = 14700 *in* 2 & † 210 *in* 4 & † 8 ♎ 30248; qui numerus non est maior numero diuidendo 34933, & ex ipso subtractus, relinquit pro residuo 4685: cui successiuè adscribendo numeri propositi subsequens membrum 067, habetur numerus 4685067: qui erit numerus diuidendus pro tertia nota inuenienda; & valor litteræ B scribitur post lunulam, vbi iam erit 72.

Quartò. Quia numerus hactenus post lunulam scriptus est 72, iuxta problema 3. etiam A = 72: quare 300 A 2 † 30 A = 1555200 † 2160 ♎ 1557360, & quia hic numerus tantum ter continetur in numero diuidendo 4685067, valor probabilis B, erit 3; & iuxta problema 4, supponendo quod A = 72, & insuper quod B = 3: formula 300 A 2 *in* B & † 30 A *in* B 2 & † B 3 = 1555200 *in* 2 & † 2160 *in* 9 & † 27 ♎ 4685067, qui numerus non est maior, sed æqualis numero diuidendo, atque ex ipso sublatus nihil remanet, neque aliud propositi numeri membrum superest, quare scribendo post lunulam valorem B nimirum 3, habebitur numerus 723, qui erit radix secunda numeri propositi 377933067: quæ radix petebatur. Eritque verum, quod 1 R 2 * 377933067 = 723.

Exemplum III.

PRopositus sit numerus 8010258 4576. Ex quo radix tertia sit extrahenda.

Primò, iuxta problema 1, numerus propositus, atque in membra diuisus erit 801, 0258, 4576. Primum membrum erit 801, secundum 0258. tertium 4576.

Secundò, iuxta problema 2, quia in tabella è regione R 3,

quæ hic inquirenda est, non inuenitur primum membrum 8 0 1, hoc membro proximè minor numerus accipitur, qui est 6 2 5, cui supernè respondet valor 5, quare nota 5 scribitur primo loco post lunulam, ipse verò numerus 6 2 5, ablatus ex 8 0 1, dat pro residuo 1 7 6, cui successiuè apponendo subsequens membrum 0 2 5 8, habetur 1 7 6 0 2 5 8; qui erit numerus diuidendus pro secunda nota inuenienda.

Tertiò. iuxta problema 3, quia numerus hactenus post lunulam scriptus est 5, etiam A = 5: quare 4 0 0 0 A 3 † 6 0 0 A 2 † 4 0 A = 5 0 0 0 0 0 † 1 5 0 0 0 † 2 0 0 ♎ 5 1 5 2 0 0, qui numerus ter continetur in numero diuidendo 1 7 6 0 2 5 8, quare valor probabilis B erit 3, & iuxta problema 4: supposito quod A = 5 & quod B = 3, etiam formula 4 0 0 0 A 3 *in* B ☉ † 6 0 0 A 2 *in* B 2 ☉ † 4 0 A *in* B 3 ☉ † B 4 = 5 0 0 0 0 0 *in* 3 ☉ † 1 5 0 0 0 *in* 9 ☉ † 2 0 0 *in* 2 7 ☉ † 8 1 ♎ 1 6 4 0 4 8 1, qui numerus non est maior numero diuidendo 1 7 6 0 2 5 8, quare ex ipso sublatus relinquit pro residuo 1 1 9 7 7 7, cui successiuè adscribendo subsequens membrum 4576, habetur numerus 1197774576 qui erit numerus diuidendus pro tertia nota inuenienda; & valor litteræ B, qui est 3, scribitur post lunulam, vbi iam erit 5 3.

Quartò. Quia numerus hactenus post lunulam scriptus est 5 3, iuxta problema 3, etiam A = 5 3: quare 4 0 0 0 A 3 † 6 0 0 A 2 † 4 0 A = 595508000 † 1685400 † 2 1 2 0 ♎ 597195520. Et quia hic numerus tantum bis continetur in numero diuidendo 1 1 9 7 7 7 4 5 7 6, valor probabilis B, erit 2, & iuxta problema 4, supponendo quod A = 5 3, & insuper quod B = 2, etiam formula 4 0 0 0 A 3 *in* B ☉ † 6 0 0 A 2 *in* B 2 ☉ † 40 A *in* B 3 ☉ † B 4 = 5 9 5 5 0 8 0 0 0 *in* 2 ☉ † 1 6 8 5 4 0 0 in 4 ☉ † 2 1 2 0 *in* 8 ☉ † 16 ♎ 1 1 9 7774576; qui numerus non est maior numero diuidendo; sed ipsi æqualis: facta igitur subtractione, nihil remanet, neque etiam remanet aliud membrum addendum pro nouo numero diuidendo, atq; adeo operatio erit finita, & post lunulam scribendo valorem B, nimirum 2, habebitur post lunulam numerus 5 3 2, qui erit radix tertia numeri propositi 8 0 1 0 2 5 8 4 5 7 6; adeoque inuentum quod petebatur. Eritque verum quod 1 R 3 * 8 0 1 0 2 5 8 4 5 7 6 = 5 3 2.

Scho-

Scholium.

IN *quo proponuntur aliqua notanda circa radicum extractiones.*

Nota primò. Si facta vltima subtractione aliquid remaneat, inferes numerum propositum non habere radicem numero vulgari integro exprimibilem. Ex. gr. si pro numero proposito in primo exemplo, propositus fuisset numerus 5 2 2 8 8 0; facta vltima subtractione remansisset 1 5 1: & tamen propositi numeri prima radix fuisset 7 2 3. Eritque verum quod 1 R 1 * 5 2 2 8 8 0 — 1 5 1 = 7 2 3.

Nota secundò. Si numerus cuius radix quæritur, est fractus vulgaris: primo, ex numeratore fractionis extracta radix, quæ petitur, dabit nouum numeratorem: deinde ex denominatore fractionis, etiam extracta radix, quæ petitur, dabit nouum denominatorem. Denique nouus numerator, cum nouo denominatore, constituet nouam fractionem, quæ erit desiderata radix fractionis propositæ: adeo vt per problemata superius proposita, non minus inueniantur quælibet radices numerorum vulgarium, qui fracti sint, quam qui non sint fracti. Ex. gr. 1 R 1 * $\frac{25}{144}$ = $\frac{5}{12}$. Item 1 R 2 * 2 7 *per* 3 4 3 = 3 *per* 7.

Nota tertiò. Quoties peracta vltima operatione, vt in nota prima diximus, relinquitur aliquod residuum, adeo vt radix inuenta, atque integris numeris expressa, non sit adæquata radix numeri propositi: si inquam hoc casu placeat habere radicem magis exactam, talem radicem inuenies, & quantum placuerit semper magis, ac magis accedere poteris, ad veram radicem, si eodem modo prosequaris operationem, apponendo alia membra, ex solis cyfris, siue o constantia: quod facere poteris, quam diu remanebit aliquod residuum: notas tamen ex adiectis membris collectas post lunulam, à præcedentibus separabis, interposito signo †, atque vlterius infra illas scribes denominatorem, constantem ex vnitate, atque tot cyfris, siue o, quot membra proposito numero fuerunt adiecta, siue quot notæ ex adiectis membris fuerunt collectæ. Vt eorum quæ hic notauimus, exemplum afferam, resumo numerum de quo in prima nota egimus, qui, numerum in primo exemplo propositum excedit 1 5 1 vnitatibus.

Sit igitur pro exemplo propositus numerus 5 2 2 8 8 0, ex

quo prima radix extrahi debeat.

Primò faciendum erit totum illud quod in primo exemplo factum est, atque ita post lunulam habebitur numerus 7 2 3, & iuxta primam notam, vltima subtractione peracta, pro residuo habebitur 1 5 1, cui numero, iuxta tertiam notam, apponendo successiuè nouum membrum, ex solis cyfris, siue o constans, habebitur numerus 1 5 1 0 0, qui erit nouus numerus diuidendus pro subsequenti nota inuenienda. Itaque rursus iuxta problema 3. quia numerus hactenús post lunulam scriptus est 7 2 3, etiam A = 723. Quare 2 0 A = 1 4 4 6 0: qui numerus semel continetur in numero diuidendo 1 5 1 0 0: adeoque valor probabilis litteræ B erit 1; & iuxta problema 4. supposito quod A = 7 2 3, & quod B = 1; etiam formula 2 0 A *in* B & † B 2 = 1 4 4 6 1: qui numerus, non est maior numero diuidendo, atque ex ipso sublatus, pro residuo relinquit numerum 6 3 9: cui successiuè apponendo aliud membrum ex solis cyfris, siue o compositum, habebis nurum 6 3 9 0 0, qui erit nouus numerus diuidendus: & valor litteræ B erit 1, quæ nota erit scribenda post lunulam: vbi iam erit scriptus numerus 7 2 3 1. Rursus iuxta problema 3, quia numerus hactenus post lunulam scriptus est 7 2 3 1, etiam A = 723 1: quare 2 0 A = 1 4 4 6 2 0, qui numerus est maior numero diuidendo 6 3 9 0 0, & ne quidem semel in illo continetur, quare iuxta notam problematis quarti, post lunulam scribitur o, atque ex numero diuidendo nihil aufertur, sed apponendo illi nouum membrum ex solis o constans, habebitur numerus 6 3 9 0 0 0 0, qui erit nouus numerus diuidendus; & numerus post lunulam scriptus erit 7 2 3 1 0. Rursus iuxta problema 3. quia numerus post lunulam scriptus est 7 2 3 1 0, etiam A = 7 2 3 1 0. quare 2 0 A = 1 4 4 6 2 0 0: qui numerus quater continetur in numero diuidendo, adeoque valor probabilis litteræ B est 4: & iuxta problema 4. supponendo quod A = 7 2 3 1 0, & insuper quod B = 4 etiam formula 2 0 A *in* B & † B 2 = 1 4 4 6 2 0 0 *in* 4 & † 1 6 ≏ 5 7 8 4 8 1 6; qui numerus non est maior numero diuidendo 6 3 9 0 0 0 0: itaque ex ipso sublatus, relinquit pro residuo 605184, & nota 4, erit post lunulam scribenda: vbi iam inuenietur numerus 7 2 3 1 0 4.

Si placeret vlterius continuare operationem, integrum est eodem prorsus modo illam prosequi. Si vero hic placeat terminare operationem, & numerum 6 0 5 1 8 4 relinquere pro residuo: tunc inuenta hactenus radix erit 7 2 3 † $\frac{104}{1000}$. In qua scriptione

vides,

vides, quomodo notæ ex propositis membris, post lunulam collectæ scribantur, vt prius, ac postea iuxta notam tertiam, interposito signo †, scribatur fractio, quæ pro numeratore habeat reliquas notas, non ex datis, sed ex appositis membris collectas post lunulam ; ac denique, quomodo hæc fractio, pro denominatore habeat vnitatem cum tot cyfris, quot membra fuerunt addita ad continuandam operationem ; tria enim membra addidimus, & hinc denominator continet vnitatem cum tribus cyfris.

Si hic quæras, quomodo proposito numero apponendum sit vltimum residuum 6 0 5 1 8 4, vt habeatur æquatio inter numerum radicalem, & radicem inuentam. Respondeo sequentem scriptionem, talem æquationem exhibere ; etenim verum erit, quod 1 R 1 * 5 2 2 8 8 0 − $\frac{605184}{1000000}$ = 7 2 3 † $\frac{104}{1000}$. Vbi videre est, quomodo residuum constituere debeat numeratorem fractionis, quæ pro denominatore, habeat vnitatem cum tot cyfris, quot in appositis membris continentur, atque hæc fractio, interposito signo −, debeat scribi successiuè post numerum propositum.



LO-

LOGISTICAE

LIBER SECVNDVS

Continens varia problemata per Logisticæ regulam soluta.

Logisticæ regulam, & quæ ad istius regulæ vsum requiruntur, superiori libro à nobis sunt exposita. Huius regulæ vsus expeditus, non nisi exercitio acquiritur; in quem finem, non parum prodesse consueuit, ad manum habere diuersa problemata per dictam regulam soluta: huiusmodi enim problematum solutiones, proprio marte tentando, ac deinde inuentas solutiones cum legitimis solutionibus conferendo, vtiliter sese exercere possunt Logisticæ studiosi. Prædicta problemata in diuersa capita distribuo: quæ primo capite continentur minorem difficultatem habent: quibus difficiliora sunt problemata quæ secundo capite proponuntur: atque ab his, vel diuersas, vel maiores difficultates annexas habent problemata tertij capitis. Denique huic secundo libro addo appendicem, in qua nonnulla proponuntur, quæ spectant quidem ad libros, qui secundum subsequi debent, & tamen non videbantur differenda, ne hic aliquid deesset quod meritò requiri possit à studioso regulæ Logisticæ.

CAPVT I.

Problema I.

Differentia duorum numerorum X, & Z sit 40 eorumdem numerorum aggregatum sit 100.

Oporteat inuenire numeros X, & Z.

Numerus minor X sit 1 *a* 1: ergo maior Z erit 1 *a* 1 † 40: ergo 2 *a* 1 † 40 = 100: ergo 2 *a* 1 = 100 — 40: ergo 2 *a* 1 = 60: ergo 1 *a* 1 = 30: ergo numerus X est 30, & numerus Z est 70. Solutionem veram esse satis patet.

Pro-

Problema II.

Differentia duorum numerorum X, & Z ſit 12, & ratio minoris numeri X ad maiorem Z ſit vt 2 *ad* 3.

Oporteat inuenire numeros X & Z.

Numerus X ſit 1 *a* 1: ergo Z erit 1 *a* 1 † 12; & 1 *a* 1 erit ad 1 *a* 1 † 12 vt 2 *ad* 3: ergo 1 *a* 1 *in* 3 = 1 *a* 1 † 12 *in* 2: ergo 3 *a* 1 = 2 *a* 1 † 24: ergo 3 *a* 1 — 2 *a* 1 = 24: ergo 1 *a* 1 = 24; Itaque X eſt 24, & Z eſt 36.

Aliter idem.

Numerus X ſit 2 *a* 1: ergo Z erit 3 *a* 1; & quia differentia numerorum X, & Z eſt 12, etiam 2 *a* 1 † 12 = 3 *a* 1: ergo 2 *a* 1 — 3 *a* 1 = — 12: ergo — 1 *a* 1 = — 12, & numerus X erit 24, & numerus Z 36.

Vtramque ſolutionem verám eſſe manifeſtum eſt.

Problema III.

Summa numerorum X, & Z ſit 60, & ratio X ad Z ſit vt 2 *ad* 3.

Oporteat inuenire numeros X, & Z.

Nmerus X ſit 1 *a* 1: igitur Z erit 60 — 1 *a* 1, ergo 1 *a* 1 erit ad 60 — 1 *a* 1, vt 2 *ad* 3: ergo 1 *a* 1 *in* 3 = 60 — 1 *a* 1 *in* 2: ergo 3 *a* 1 = 120 — 2 *a* 1: ergo 3 *a* 1 † 2 *a* 1 = 120: ergo 5 *a* 1 = 120: ergo 1 *a* 1 = 24: ergo numerus X eſt 24, & numerus Z eſt 36.

Aliter idem.

Numerus X ſit 1 *a* 1: ergo Z erit $1\frac{1}{2}$ *a* 1: ergo 1 *a* 1 † $1\frac{1}{2}$ *a* 1 = 60: ergo $\frac{5}{2}$ *a* 1 = 60: ergo $\frac{2}{2}$ *a* 1 = 24: ergo

ergo $1\,a\,1 = 24$ · ergo numerus X eſt 24, & numerus Z eſt 36.

Solutionis veritas, vlteriori expoſitione non indiget.

Problema IV.

SIt numerus X ignotus, ſciantur tamen duo numeri minores numero X, & tales ſint 76, & 4; atque de his numeris conſtet, quod defectus numeri 76 à numero X, ad defectum numeri 4 à numero X, ſit vt 1 *ad* 4.

Oporteat inuenire numerum X.

Defectus 76 à numero X ſit $1\,a\,1$: quandoquidem igitur $1\,a\,1$ eſt ad $4\,a\,1$, vt 1 *ad* 4, & etiam defectus numeri 76 à numero X, ad defectum numeri 4 à numero X, ſit vt 1 *ad* 4; etiam defectus numeri 4 à numero X, erit $4\,a\,1$: ergo & $76 + 1\,a\,1 = X$, & etiam $4 + 4\,a\,1 = X$: ergo $76 + 1\,a\,1 = 4 + 4\,a\,1$: ergo $76 - 4 = 4\,a\,1 - 1\,a\,1$: ergo $72 = 3\,a\,1$: ergo $1\,a\,1 = 24$: ergo defectus numeri 76 à numero X eſt 24: ergo numerus X eſt 100.

Solutionem veram eſſe patet: nam defectus 76 à numero 100 eſt 24, & defectus 4 à numero 100 eſt 96, & 24 *ad* 96 eſt vt 1 *ad* 4.

Problema V.

SIt numerus X ignotus cognoſcantur tamen duo numeri maiores numero X, & tales ſint 60, & 40; atque de his numeris conſtet, quod exceſſus 60 ſupra X, ad exceſſum 40 ſupra X, ſit vt 3 *ad* 1.

Oporteat inuenire numerum X.

Exceſſus numeri 60, ſupra numerum X, ſint $3\,a\,1$: igitur cum $3\,a\,1$ ſit ad $1\,a\,1$, vt 3 *ad* 1, & etiam exceſſus numeri 60 ſupra numerum X, ad exceſſum numeri 40 ſupra numerum X ſit vt 3 *ad* 1, etiam exceſſus numeri 40 ſupra numerum X, erit $1\,a\,1$: ergo $60 - 3\,a\,1 = X$, & etiam $40 - 1\,a\,1 = X$: ergo $60 - 3\,a\,1 = 40 - 1\,a\,1$: ergo $60 - 40 = 3\,a\,1 - 1\,a\,1$: ergo $20 = 2\,a\,1$: ergo $30 = 3\,a\,1$: ergo exceſſus numeri 60 ſupra numerum X eſt 30: ergo numerus X eſt 30.

Solutionem veram eſſe patet: nam exceſſus 60 ſupra 30, eſt 30, & exceſſus 40 ſupra 30, eſt 10; & 30 eſt ad 10, vt 3 *ad* 1.

Pro-

Problema VI.

SIt numerus X ignotus, cognoſcantur tamen duo numeri 60, & 180, & ſciatur, quod defectus 60 à numero X, ad exceſſum 180 ſupra numerum X, ſit vt 1 *ad* 5.

Oporteat inuenire numerum X.

Defectus 60 à numero X ſit 1 *a* 1: quandoquidem igitur 1*a*1 ſit ad 5 *a* 1 vt 1 *ad* 5, & etiam defectus numeri 60 à numero X, ad exceſſum numeri 180 ſupra numerum X, ſit vt 1 *ad* 5: etiam exceſſus numeri 180 ſupra numerum X, erit 5 *a* 1: ergo 60 † 1 *a* 1 = X, & etiam 180 − 5 *a* 1 = X: ergo 60 † 1 *a* 1 = 180 − 5 *a* 1: ergo 5 *a* 1 † 1 *a* 1 = 180 − 60: ergo 6 *a* 1 = 120: ergo 1 *a* 1 = 20: ergo defectus 60 à numero X eſt 20: ergo numerus X eſt 80.

Solutionis veritas manifeſta eſt, quandoquidem defectus 60 à numero 80 ſit 20, & exceſſus 180 ſupra numerum 80 ſit 100, & denique 20 ſit ad 100, vt 1 *ad* 5.

Problema VII.

NVmerus 60 diuidendus ſit in duas partes X, & Z, ita vt tertia pars numeri X, addita quintæ parti numeri Z, faciat 14.

Tertia pars numeri X ſit 1 *a* 1: ergo totus numerus X erit 3 *a* 1, & inſuper 14 − 1 *a* 1 = quintæ parti numeri Z: ergo totus numerus Z = 70 − 5 *a* 1: quandoquidem verò X † Z = 60, etiam 3 *a* 1 † 70 − 5 *a* 1 = 60: ergo etiam − 2 *a* 1 = 60 − 70: ergo − 2 *a* 1 = − 10: ergo 1 *a* 1 = 5: ergo tertia pars numeri X eſt 5: ergo numerus X eſt 15: ergo numerus Z eſt 45, & quinta pars numeri Z eſt 9.

Solutionem veram eſſe patet: cum 45 † 15 = 60, & etiam 9 † 5 = 14, vt petebatur.

Problema VIII.

NVmerus 348, diuidendus ſit in duos numeros X, & Z quorum differentia ſit 84, & tertia pars numeri X, addita quartæ parti numeri Z faciat 98.

Tertia pars numeri X sit $1a1$: ergo totus numerus X erit $3a1$; Item quarta pars numeri Z erit $98 - 1a1$, & numerus Z erit $392 - 4a1$: ergo $3a1 + 84 = 392 - 4a1$: ergo $3a1 + 4a1 = 392 - 84$: ergo $7a1 = 308$: ergo $1a1 = 44$: ergo tertia pars numeri X erit 44: ergo numerus X erit 132: ergo numerus Z erit 216, cuius quarta pars est 54.

Vt intelligas solutionem legitimam esse, aduerte, differentiam 132, & 216 esse 84; præterea $132 + 216 = 348$. Denique $44 + 54 = 98$.

Problema IX.

INueniendi sint duo numeri inæquales, quorum X maior sit, & Z minor, ita vt illorum differentia sit 12, & quarta pars numeri Z, ablata à tertia parte numeri X relinquat numerum 9.

Tertia pars numeri X sit $1a1$: ergo numerus X erit $3a1$, & quarta pars numeri Z erit $1a1 - 9$; Numerus Z erit $4a1 - 36$: ergo $3a1 = 4a1 - 36 + 12$. ergo $3a1 = 4a1 - 24$: ergo $3a1 - 4a1 = -24$: ergo $-1a1 = -24$: ergo $1a1 = 24$: igitur tertia pars numeri X est 24: atque adeo numerus X est 72, & numerus Z est 60.

Patet solutionem veram esse: quandoquidem differentia numerorum 72, & 60 sit 12, & 15 sit quarta pars 60, quæ si auferatur ex 24 relinquit pro residuo numerum 9.

Problema X.

NVmerus X sit ignotus, sciatur tamen quod si X ducatur in 12, & hoc productum diuidatur per X bis in se ductum, atque insuper ductum in 4, producat $\frac{24}{32}$

Quæritur quis sit numerus X.

X sit $1a1$: ergo X in 12 erit $12a1$. Præterea X bis in se, erit $1a3$: denique $1a3$ in 4 erit $4a3$: ergo $12a1$ *per* $4a3 = 24$ *per* 32: ergo $3a02 = 24$ *per* 32: atqui 24 *ad* $32 = 3$ *ad* 4: ergo per problema 3. cap. 5. etiam $1a2 = 4$: ergo $1a1 = 2$: ergo X est 2.

Patet solutionem veram esse, nam 2 *in* $12 = 24$: ergo supposito quod $X = 2$ etiam X *in* $12 = 24$. Rursus quia 2 bis in se ductum dat 8, & 8 ductum in 4 dat 32 etiam X bis in se ductum,

ctum, atque inſuper ductum in 4 æquabitur 32 adeoque X ductum in 12 & hoc productum diuiſum per X bis in ſe ductum, atque inſuper ductum in 4 erit $\frac{24}{32}$.

CAPVT II.

Singula huius capitis problemata duplicem titulum habent præfixum, in primo Arithmeticè, in altero Geometricè proponitur idem problema, vt ita reflectant tyrones, non minus Geometriæ, quam Arithmeticæ deſeruire noſtram Logiſticam. Solutiones hoc loco non affero niſi Arithmeticas: quam facile tamen mutari poſſint, aut in Geometricas, aut etiam in tales quæ, & Geometriæ, & Arithmeticæ communes ſint, atque vniuerſales, ſuo loco exponam.

Finis propter quem non raro plures eiuſdem problematis ſolutiones afferam, diuerſus non eſt ab ipſo fine, propter quem propono plura problemata; etenim totius ſecundi libri problemata, ſunt veluti exempla, in quibus apparet vſus regulæ Logiſticæ, & eorum quæ in ordine ad vſum huius regulæ expoſita ſunt: vt vero in his inſtituatur Logiſticæ ſtudioſus, non minus vtiles ſunt, diuerſæ ſolutiones eorumdem, quam diuerſorum problematum. In nonnullis problematum ſolutionibus hic etiam aſſumo aliqua theoremata, quæ in fine huius libri proponuntur, ac demonſtrantur: quas ſolutiones cum cæteris conferendo, diſces, eiuſmodi theorematum vtilitatem, per quæ, commodè fugio compoſitarum æquationum reſolutiones, occurrentes in cæteris eorumdem problematum ſolutionibus.

Problema I.

DVo numeri X & Z ſint ignoti: ſciatur tamen quod X ductus in Z producat 20: & inſuper, quod X ſit ad Z, vt 1 *ad* 5.

Oporteat inuenire numeros X & Z.

Vel duo rectanguli contigua latera X & Z *ſint ignota, ſciatur tamen magnitudo rectanguli: & inſuper proportio, quam latus* X, *habet ad latus* Z.

Oporteat inuenire latera X & Z.

Solutio. Numerus X ſit 1 *a* 1: ergo Z erit 5 *a* 1: ergo 1 *a* 1 *in* 5 *a* 1 = 20: ergo 5 *a* 2 = 20: ergo 1 *a* 2 = 4: ergo
1 2 1 *a* 1

1 a 1 = 2: ergo numerus X eſt 2 : ergo numerus Z eſt 10.

Problema II.

DVo numeri X & Z ſint ignoti, ſciatur tamen, quod aggregatum X & Z ſit 12, quod X ductus in Z, producat 20.

Oporteat inuenire numeros X & Z.

Vel duo rectanguli contigua latera X & Z ſint ignota, ſciatur tamen aggregatum laterum X & Z. Item rectangulum contentum lateribus X & Z cognitum ſit.

Oporteat inuenire latera X & Z.

Prima ſolutio. X − Z ſit 1 a 1: ergo X − Z*q* = 1 a 2: atqui per theorema 1. Appendicis X − Z*q* & + X *in* 4 Z = X + Z*q*: ergo etiam 1 a 2 & + X *in* 4 Z = X + Z*q*: atqui per hypotheſim X *in* 4 Z = 80: & inſuper X + Z*q* = 144: ergo 1 a 2 + 80 = 144: ergo 1 a 2 = 144 − 80: ergo 1 a 2 = 64: ergo 1 a 1 = 8: ergo differentia numerorum X & Z eſt 8: & etiam per hypotheſim aggregatum numerorum X & Z eſt 12: ergo per problema 1. cap. 1. numerorum X & Z minor eſt 2, maior eſt 10.

Secunda ſolutio numerorum X & Z minor ſit 1 a 1: ergo maior erit 12 − 1 a 1: ergo 1 a 1 in 12 − 1 a 1 = 20: ergo 12 a 1 − 1 a 2 = 20; reſoluendo hanc æquationem compoſitam, rurſus inuenies, numerorum X & Z minorem eſſe 2, maiorem eſſe 10.

Scholium.

N*Ota primo. Me in theorematibus Appendicis huius libri adhibere litteras* A & B, *à quibus diuerſæ ſunt litteræ* X & Z, *quæ hic, & in ſequentibus aliquot problematibus adhibentur: ne hæc diuerſitas aliquem turbet, breuiter monendum putaui, me adhibuiſſe hanc litterarum diuerſitatem, vt conſulerem tyronum vtilitati, atque ita diſcerent, non reflectere ad ipſarum litterarum identitatem, vel diuerſitatem materialem, ſed ad formalem identitatem, vel diuerſitatem, dependentem ab hypotheſi, ex qua habent quod ſint dignitates eædem, vel diuerſæ: atque adeo eaſdem, vel diuerſas proprietates admittant; nobis enim non de ipſis litteris ſermo eſt, in quantum tantum litteræ*

ſunt;

sunt ; sed de litteris in quantum ex vi hypothesis repraesentant quantitates, atque dignitates appellantur ; sic in hoc secundo problemate assumpsimus X — Z *q &* † X *in* 4 Z = X † Z *q. id vero sequi ex theoremate primo Appendicis, si necdum intellexeris, discere poteris ex sequenti discursu. Per Theorema* 1. *qualescunque fuerint quantitates* A & B, *semper verum erit* A — B *q &* † A *in* 4 B = A † B *q : ergo si quantitates* A & B *significent duos numeros, qui sunt aliquae quantitates : etiam de duobus illis numeris idem verum erit : sed ex vi hypothesis huius secundi problematis,* X & Z *significant duos numeros : ergo etiam de numeris* X & Z *verum erit quod* X — Z & † X *in* 4 Z = X — Z *q, vt à nobis assumebatur, atque hoc breuiter monendum putaui, in gratiam tyronum, licet scirem tali monitione non indigere aliquem, vel leuiter versatum in primis Geometriae aut Arithmeticae elementis.*

Nota secundo. Iuxta nostra principia fieri posse, vt 1 *a* 1 = 0 *cuius rei exemplum placuit afferre in proposito hic problemate : quod proinde resumo, mutatis tantum numeris, qui supponuntur cogniti.*

Duo numeri X & Z *sint ignoti, sciatur tamen quod aggregatum* X & Z *sit* 11, *& quod* X *in* Z *producat* $30\frac{1}{4}$.

Oporteat inuenire X & Z.

Solutio. X — Z *sit* 1 *a* 1. *ergo* X — Z *q* = 1 *a* 2 : *atque per theorema* 1 *Appendicis* X — Z *q &* † X *in* 4 Z = X † Z *q : ergo etiam* 1 *a* 2 *&* † X *in* 4 Z = X † Z *q : atqui per hypothesim* X *in* 4 Z = 121, *& insuper* X † Z *q* = 121 : *ergo* 1 *a* 2 † 121 = 121 : *ergo* 1 *a* 2 = 121 — 121 : *ergo* 1 *a* 2 = 0 : *ergo* 1 *a* 1 = 0 : *ergo differentia* X & Z *est nihil : ergo* X = Z : *ergo* X = $5\frac{1}{2}$, *& etiam* Z = $5\frac{1}{2}$, *quandoquidem per hypothesim* X † Z = 11.

Ex hoc exemplo satis patet fieri posse, vt 1 *a* 1 = 0 : *ac praeterea fieri posse, vt* 1 *a* 2 = 0 : *cuius suo tempore iuuabit meminisse. Idem adductis alijs exemplis probare non foret difficile, sed videtur superfluum.*

Nota tertio. In hypothesi huius secundi problematis, non determinari, an vna, vel quaenam ex quantitatibus X & Z, *altera minor sit : & tamen primam solutionem sic incipio* X — Z *sit* 1 *a* 1 ; *adeo vt* X — Z, *siue* 1 *a* 1 *adhibeatur pro differentia* X & Z : *quod est à veritate alienum, nisi* X *non sit minor* Z, *atque adeo erroris suspicionem alicui mouere posset, huiusmodi suppositio, quae in non paucis alijs problematibus recurrit. Vt tali suspicione liberem Logisticae studiosum,*

hic monendum putaui, quod assumendo X — Z pro differentia X & Z, supponam quidem quantitatem X non esse minorem Z, quodque hac suppositione vtar, vt inueniam differentiam X & Z: hac tamen differentia cognita, desero talem suppositionem: neque enim infero quantitatem X maiorem esse, sed tantum ex vi talis suppositionis infero quænam sit differentia X & Z: deinde hac differentia cognita, independenter à priori hypothesi infero quales sint duæ illæ quantitates quarum vna vocabatur X, altera Z. Cæterum quemadmodum ex hypothesi nihil habetur determinans quænam ex quantitatibus X & Z maior sit, vel minor, sic etiam tale nihil in solutione statuitur, neque etiam petitur in ipso problemate.

Problema III.

DVo numeri X & Z sint ignoti, sciatur tamen, quod X ductus in Z producat 20, & quod quadratum X, additum quadrato Z, producat 104.

Oporteat inuenire numeros X & Z.

Vel duo rectanguli contigua latera X & Z sint ignota, cognitum tamen sit rectangulum, & etiam aggregatum quadratorum, quæ fierent supra latera X & Z.

Oporteat inuenire latera X & Z.

Solutio prima X — Z sit 1 *a* 1: ergo X — Z *q* = 1 *a* 2: atqui per theorema 1 Appendicis X — Z *q* = X 2 † Z 2 & † X *in* 2 Z: ergo etiam 1 *a* 2 = X 2 † Z 2 & — X *in* 2 Z: sed per hypothesim X 2 † Z 2 = 104, & insuper X *in* 2 Z = 40: ergo 1 *a* 2 = 104 — 40 ♎ 64: ergo 1 *a* 1 = 8: ergo differentia X & Z est 8. Rursus X † Z sit 1 *a* 1: ergo X † Z *q* = 1 *a* 2: sed per theorema 1 Appendicis, X † Z *q* = X 2 † Z 2 & † X *in* 2 Z: ergo 1 *a* 2 = X 2 † Z 2 & † X *in* 2 Z: atqui per hypothesim X 2 † Z 2 = 104, & insuper X *in* 2 Z = 40: ergo 1 *a* 2 = 104 † 40 ♎ 144: ergo 1 *a* 1 = 12: ergo X † Z = 12: ergo aggregatum X & Z est 12: & differentia X & Z est 8: igitur per problema 1 cap. 1 numerorum X & Z, minor est 2, & maior est 10.

Secunda solutio. Supposito quod numerorum X & Z maior sit X, minor Z, per theorema 1 Appendicis X 2 † Z 2 & — X *in* 2 Z = X — Z *q*: atqui per hypothesim X 2 † Z 2 = 104: item X *in* 2 Z = 40: ergo X — Z *q* = 104 — 40 ♎ 64: ergo X — Z = 8: ergo differentia X & Z est 8. Rursus per theo-

theorema 1 Appendicis X † Z q = X 2 † Z 2 & † X in 2 Z: atqui per hypothesim X 2 † Z 2 = 104: item X in 2 Z = 40: ergo X † Z q = 104 † 40 = 144: ergo X † Z = 12: ergo aggregatum X & Z est 12, & insuper differentia X & Z est 8: ergo per problema 1. cap. 1. numerorum X & Z, minor est 2, maior est 10.

Problema IV.

DVo numeri X & Z sint ignoti, sciantur tamen quod numerus X ductus in Z producat 20, & insuper quod differentia X & Z sit 8.

Oporteat inuenire numeros X & Z.

Vel duo rectanguli contigua latera X & Z *sint ignota, sciatur tamen magnitudo ipsius rectanguli, & insuper differentia laterum* X & Z *sit cognita.*

Oporteat inuenire latera X & Z.

Prima solutio. X † Z sit 1 *a* 1: igitur X † Z q = 1 *a* 2: atqui per theorema 1. Appendicis X † Z q = X − Z q & † X *in* 4 Z: ergo 1 *a* 2 = X − Z q & † X *in* 4 Z: sed per hypothesi X − Z = 8, adeoque X − Z q = 64: & insuper X *in* 4 Z = 80: ergo 1 *a* 2 = 64 † 80 = 144: ergo 1 *a* 1 = 12: ergo X † Z = 12: sed etiam per hypothesim differentia X & Z est 8: ergo per problema 2. cap. 1. numerorum X & Z minor est 2, maior est 10.

Secunda solutio. Minor numerorum X & Z sit 1 *a* 1: ergo maior erit 1 *a* 1 † 8: ergo 1 *a* 1 *in* 1 *a* 1 † 8 = 20: ergo 1 *a* 2 † 8 *a* 1 = 20: resoluendo hanc compositam æquationem, numerorum X & Z minor erit 2, maior erit 10.

Problema V.

DVo numeri X & Z sint ignoti, sciatur tamen quod differentia numerorum X & Z sit 8, & præterea quod aggregatum quadratorum X & Z sit 104.

Oporteat inuenire numeros X & Z.

Vel duo rectanguli contigua latera X & Z *sint ignota, sciatur tamen differentia laterum* X & Z, & *preterea cognitum sit aggregatum quadratorum* X & Z.

Oporteat inuenire latera X & Z.

Prima solutio. X *in* Z sit 1 *a* 2; hoc posito, per theorema 1. Appen-

Appendicis X 2 † Z 2 & − X *in* 2 Z = X − Z *q*: ergo etiam X 2 † Z 2 − 2 *a* 2 = X − Z *q*: atqui per hypothesim X 2 † Z 2 = 104: item X − Z *q* = 64: ergo 104 − 2 *a* 2 = 64: ergo − 2 *a* 2 = 64 − 104 ♎ − 40: ergo 2 *a* 2 = 40: ergo 1 *a* 2 = 20: ergo X *in* Z est 20: & insuper per hypothesim, differentia X & Z est 8 · quare per problema 4. inuenies numerorum X & Z minorem esse 2, maiorem esse 10. Vel si placet, ex cognito iam X *in* Z, quod est 20; & aggregato quadratorum X & Z quod est 104: per problema 3. inuenies numeros X & Z.

Secunda solutio. Numerorum X & Z minor sit 1 *a* 1: ergo maior erit 1 *a* 1 † 8: ergo quadratum minoris erit 1 *a* 2: & quadratum maioris erit 1 *a* 2 † 16 *a* 1 † 64: ergo 1 *a* 2 † 1 *a* 2 † 16 *a* 1 † 64 = 104: ergo 2 *a* 2 † 16 *a* 1 = 104 − 64: ergo 2 *a* 2 † 16 *a* 1 = 40: hanc compositam æquationem resoluendo rursus inuenies numerorum X & Z, minorem esse 2, maiorem 10.

Problema VI.

DVo numeri X & Z sint ignoti, cognoscatur tamen quod aggregatum numerorum X & Z sit 12: & insuper quod aggregatum quadratorum X & Z sit 104.

Oporteat inuenire numeros X & Z.

Vel: Duo rectanguli contigua latera X & Z *sint ignota, cognoscatur tamen aggregatum laterum* X & Z: & *insuper cognitum sit aggregatum quadratorum* X & Z.

Oporteat inuenire latera X & Z.

Prima Solutio. X *in* Z sit 1 *a* 1: ergo X *in* 2 Z = 1 *a* 2: sed per theorema 1. Appendicis X † Z *q* = X 2 † Z 2 & † X *in* 2 Z: ergo X † Z *q* = X 2 † Z 2 † 2 *a* 1: atqui per hypothesim X † Z *q* = 144, & insuper X 2 † Z 2 = 104: ergo 144 = 104 † 2 *a* 1: ergo 144 − 104 = 2 *a* 1: ergo 40 = 2 *a* 1: ergo 20 = 1 *a* 1: ergo X *in* Z est 20. Rursus, differentia X & Z sit 1 *a* 1: ergo X − Z *q* = 1 *a* 2: atqui per theorema 1. Appendicis X − Z *q* = X 2 † Z 2 & − X *in* 2 Z: ergo 1 *a* 2 = X 2 † Z 2 & − X *in* 2 Z: sed etiam per hypothesim X 2 † Z 2 = 104: item vt iam ostensum est, X *in* 2 Z = 40: ergo 1 *a* 2 = 104 − 40: ergo 1 *a* 2 = 104 − 40: ergo 1 *a* 2 = 64: ergo 1 *a* 1 = 8: ergo differentia X & Z est 8: item per hypothesim aggregatum X & Z est 12: ergo per prob. 1. cap. 1. numerorum X & Z, minor est 2, maior est 10.

Secun-

Secunda solutio. Numerorum X & Z minor sit $1a1$: ergo maior erit $12 - 1a1$: ergo $X + Zq = 1a2$ & $+ 12 - 1a1q$ ♎ $1a2 + 144 - 24a1 + 1a2$ ♎ $2a2 - 24a1$: atqui per hypothesim X in $Zq = 144$: ergo $2a2 - 24a1 = 144$: resoluendo hanc æquationem compositam, inuenies numerorum X & Z, minorem esse 2, & maiorem esse 10.

Tertia solutio. Per hypothesim $X + Z = 12$: ergo $X + Zq = 144$: atqui per theorema 1. Appendicis $X + Zq = X2 + Z2$ & $+ X$ *in* $2Z$: ergo $X2 + Z2$ & $+ X$ *in* $2Z = 144$: sed per hypothesim $X2 + Z2 = 104$: ergo 104 & $+ X$ *in* $2Z = 144$: ergo X *in* $2Z = 144 - 104$: ergo X *in* $2Z = 40$: ergo X *in* $Z = 20$: sed etiam $X + Z = 12$: ergo per problema 2. cap. 1. inuenies, numerorum X & Z, minorem esse 2, & maiorem esse 10.

Problema VII.

Duo numeri X & Z sint ignoti, sciatur tamen quod differentia X & Z sit 8: & insuper quod differentia quadratorum X & Z, sit *96*.

Oporteat inuenire numeros X & Z.

Vel duo rectanguli contigua latera X & Z sint ignota, cognoscatur tamen differentia laterum X & Z, & insuper cognita sit differentia quadratorum X & Z.

Oporteat inuenire latera X & Z.

Prima solutio. Numerorum X & Z minor sit $1a1$: ergo maior erit $1a1 + 8$: ergo quadratum minoris erit $1a2$: & quadratum maioris erit $1a2 + 16a1 + 64$: ergo differentia quadrati minoris, & maioris, erit $16a1 + 64$: sed per hypothesim differentia quadrati minoris, & maioris, est 96: ergo $16a1 + 64 = 96$: ergo $16a1 = 96 - 64$: ergo $16a1 = 32$: ergo $1a1 = 2$: ergo numerorum X & Z, minor est 2: ergo maior 10.

Secunda solutio. Numerorum X & Z maior sit A, minor B. hoc posito, ex hypothesi patet $A2 - B2 = 96$; item $A - B = 8$: atqui per theorema 1. Appendicis $A2 - B2$ *per* $A - B = A + B$: ergo 96 *per* $8 = A + B$: sed etiam 96 *per* $8 = 12$: ergo aggregatum X & Z est 12; item per hypothesim differentia X & Z est 8 : ergo per problema 1. cap. 1. inuenies numerorum X & Z, minorem esse 2, & maiorem esse 10.

Problema VIII.

DVo numeri X & Z sint ignoti, sciatur tamen quod aggregatum X & Z sit 12: & insuper quod differentia quadratorum X & Z sit 96.

Oporteat inuenire numeros X & Z.

Vel duo rectanguli contigua latera X & Z sint ignota cognoscatur tamen aggregatum laterum X & Z: & etiam cognita sit differentia quadratorum X & Z.

Oporteat inuenire latera X & Z.

Prima solutio. Numerorum X & Z minor sit 1 *a* 1: ergo maior erit 12 − 1 *a* 1: ergo quadratum minoris erit 1 *a* 2: & quadratum maioris erit 144 − 24 *a* 1 † 1 *a* 2: ergo differentia quadrati minoris, & maioris erit 144 − 24 *a* 1: sed etiam per hypothesim differentia quadrati minoris, & maioris est 96: ergo 144 − 24 *a* 1 = 96: ergo − 24 *a* 1 = 96 − 144: ergo − 24 *a* 1 = − 48: ergo 1 *a* 1 = 2: ergo numerorum X & Z minor est 2: ergo maior est 10.

Secunda solutio. Numerorum X & Z maior sit A, & minor B. Hoc posito, ex hypothesi patet A 2 − B 2 = 96; item A † B = 12: atqui per theorema primum Appendicis A 2 − B 2 *per* A † B = A − B: ergo 96 *per* 12 = A − B: sed etiam 96 *per* 12 = 8: ergo A − B = 8: ergo differentia X & Z est 8: sed etiam per hypothesim aggregatum X & Z est 12: ergo per problema 1. cap. 1. inuenies numerorum X & Z, minorem esse 2, maiorem esse 10.

Problema IX.

DVo numeri X & Z sint ignoti, sciatur tamen quod X ductus in Z producat 20; & insuper quod differentia quadratorum X & Z sit 96.

Oporteat inuenire numeros X & Z.

Vel duo rectanguli contigua latera X & Z sint ignota, cognoscatur tamen magnitudo ipsius rectanguli: & insuper nota sit differentia quadratorum X & Z.

Oporteat inuenire latera X & Z.

Pri-

Prima ſolutio. Aggregatum quadratorum X & Z ſit 1 *a* 2. Hoc ſuppoſito, per theorema 1. Appendicis X † Z *q* = X 2 † Z 2 & † X *in* 2 Z: ſed per ſuppoſitionem X 2 † Z 2 = 1 *a* 2: item per hypotheſim X *in* 2 Z = 40: ergo X † Z *q* = 1 *a* 2 † 40: atqui etiam per theorema 1. Appendicis X † Z *q* = X — Z *q* & † X *in* 4 Z: ergo etiam 1 *a* 2 † 40 = X — Z *q* & † X *in* 4 Z: atqui per per hypotheſim X *in* 4 Z = 80: ergo 1 *a* 2 † 40 = X — Z *q* & † 80: ergo 1 *a* 2 † 40 — 80 = X † Z *q*: ergo 1 *a* 2 — 40 = X — Z *q*: quandoquidem igitur per theorema 1. Appendicis X † Z *q in* X — Z *q* = X 2 — Z 2 *q*: & iam oſtenſum ſit X † Z *q* = 1 *a* 2 † 40, item X — Z *q* = 1 *a* 2 — 40, ac denique per hypotheſim X 2 — Z 2 *q* = *96 q* ♎ *9216*: patet etiam 1 *a* 2 † 40 *in* 1 *a* 2 — 40 = *9216*: atqui 1 *a* 2 † 40 *in* 1 *a* 2 — 40 = 1 *a* 4 — 1600: ergo 1 *a* 4 — 1600 = *9216*: ergo 1 *a* 4 = *9216* † 1600: ergo 1 *a* 4 = 10816: ergo 1 *a* 2 = 104: ergo aggregatum quadratorum X & Z eſt 104: quare per problema 3. inuenies numerorum X & Z, minorem eſſe 2, & maiorem eſſe 10.

Secunda ſolutio. Numerus X ſit 1 *a* 1: ergo Z erit 20 *per* 1 *a* 1: ergo quadratum numeri X erit 1 *a* 2, & quadratum numeri Z erit 400 *per* 1 *a* 2: ergo differentia quadratorum X & Z erit 400 *per* 1 *a* 2 — 1 *a* 2; ſed etiam per hypotheſim differentia quadratorum X & Z eſt *96*: ergo 400 *per* 1 *a* 2 — 1 *a* 2 = *96*: ergo 400 *per* 1 *a* 2 = *96* † 1 *a* 2: ergo 400 = *96* † 1 *a* 2 *in* 1 *a* 2: ergo 400 = *96 a* 2 † 1 *a* 4; reſoluendo hanc æquationem compoſitam, inuenies 1 *a* 1 = 2; quare 20 *per* 1 *a* 1 = 10: adeoque numerorum X & Z, minor eſt 2, maior eſt 10.

CAPVT III.

Priora quatuor problemata huius capitis, & Arithmeticè, & Geometricè proponuntur, titulis prima fronte non parum inter ſe diſcrepantibus: tamen ex ſequenti nota diſces eos vix aliter inter ſe differre, quam quod prior Arithmeticè, alter Geometricè proponat problema.

Nota. Si tres numeri X, P, Z, ſint tales, vt aggregatum quadratorum X & Z, æquetur quadrato P: lineæ rectæ ſignificatæ per tales numeros, poterunt conſtituere triangulum rectangulum: & viciſſim, ſi tres lineæ rectæ conſtituentes triangulum rectangulum ſignificentur per numeros X, P, Z, quorum maior ſit P: tunc aggregatum quadratorum X & Z, erit æquale quadrato P. Patet hoc, ex

pro-

propositione 20. cap. 5. elementorum.

Hinc vlterius licebit obseruare, quod licet Arithmetica nullos agnoscat angulos, nulla triangula, tamen potest determinare numeros, qui significent latera trianguli rectanguli; atque habeant proprietatem non alijs rectis lineis conuenientem, quam quæ trianguli rectanguli latera possunt constituere.

Problemata quæ quatuor priora subsequuntur, simplici titulo proponuntur, sed simul Arithmeticè, atque Geometricè, vel potius vniuersaliter. Quæ notaui initio capitis secundi, aliqua ex parte etiam spectant ad sequentia problemata, non ideo tamen videntur hic repetenda.

Problema I.

TRes numeri X, Z, P, sint tales, vt aggregatum quadratorum X & Z, æquetur quadrato P. Et sciatur quod X sit 12; & & quod differentia Z & P, sit 8.

Oporteat inuenire numeros Z & P.

Vel tres rectæ lineæ X, Z, P, quarum maxima sit P, sint latera trianguli rectanguli, & cognita sit recta X: item cognoscatur differentia Z & P.

Oporteat inuenire latera Z & P.

Quandoquidem aggregatum X & Z, æquetur quadrato P, patet quod quadratum X, nimirum 144, sit differentia quadratorum Z & P. Deinde etiam per hypothesim 8 est differentia Z & P. Quare per problema 7. cap. 2. inuenies Z esse 5, & P esse 13.

Problema II.

TRes numeri X, Z, P, sint tales, vt aggregatum quadratorum X & Z, æquetur quadrato P. Et sciatur quod X sit 12, quodque aggregatum Z & P, sit 18.

Oporteat inuenire numeros Z & P.

Vel, tres rectæ lineæ quarum maxima P, sint latera trianguli rectanguli, & cognoscatur recta X: item aggregatum Z & P.

Oporteat inuenire latera Z & P.

Quandoquidem aggregatum quadratorum X & Z, æquetur quadrato P: patet quod quadratum X, nimirum 144, sit diffe-

rentia quadratorum Z *&* P. Præterea etiam per hypotheſim 18 eſt aggregatum Z *&* P : quare per problema 8. cap. 2. inuenies numerum X eſſe 5, & numerum P eſſe 13.

Problema III.

TRes numeri X, Z, P, ſint tales, vt aggregatum quadratorum X, *&* Z, æquetur quadrato P, & ſciatur quod numerus P ſit 13, & quod differentia X *&* Z, ſit 7.

Oporteat inuenire numeros X *&* Z.

Vel, tres rectæ lineæ X, Z, P, quarum maxima P, ſint latera trianguli rectanguli, & cognoſcatur recta P, atque differentia X & Z.

Oporteat inuenire latera X & Z.

Quoniam per hypotheſim aggregatum quadratorum X *&* Z, æquatur quadrato P : manifeſtum eſt quadratum P, nimirum 169, eſſe aggregatum quadratorum X *&* Z. Præterea per hypotheſim differentia X *&* Z eſt 7 : igitur per problema 5. cap. 2. inuenies numerorum X *&* Z maiorem eſſe 12, minorem eſſe 5.

Problema IV.

TRes numeri X, Z, P, ſint tales, vt aggregatum quadratorum X *&* Z, æquetur quadrato P : & ſciatur P eſſe 13, & aggregatum Z P eſſe 17.

Oporteat inuenire X *&* Z.

Vel, tres lineæ X, Z, P, quarum maior P, ſint latera trianguli rectanguli : deinde cognoſcatur latus P, & aggregatum Z & P.

Oporteat inuenire latera X & Z.

Quemadmodum præcedentia tria problemata reduximus ad aliquod problema cap. 2. ſic præſens problema reduci poſſet ad problema 6. cap. 2. verum animi gratia placet illud immediatè ſoluere.

Solutio. Quoniam per hypotheſim P eſt 13, & aggregatum Z *&* P eſt 17 : patet Z eſſe 5; quo poſito, X ſit 1 *a* 1 : ergo 1 *a* 2 † 25 = 169 : ergo 1 *a* 2 = 169 − 25 : ergo 1 *a* 2 = 144 : ergo 1 *a* 1 = 12 : quare X eſt 12, & Z eſt 5.

Pro-

Problema V.

TRes quantitates X,P,Z, ſint proportionales & cognoſcatur P: item differentia X & Z. Ex.gr. P ſit 6: & differentia X & Z ſit 16.

Oporteat inuenire X & Z.

Prima ſolutio. Quandoquidem quantitates X, P, Z, ſint proportionales, X *in* Z = P *q* ♎ 36: ergo X *in* Z = 36: deinde per hypotheſim differentia X & Z eſt 16: ergo per problema 4. cap. 2. inuenies quantitatum X & Z minorem eſſe 2, maiorem eſſe 18.

Secunda ſolutio. X ſit 1 *a* 1: ergo Z erit 1 *a* 1 † 16: ergo 1 *a* 1 *in* 1 *a* 1 † 16 = 6 *in* 6: ergo 1 *a* 2 † 16 *a* 1 = 36: reſoluendo hanc æquationem compoſitam inuenies, quantitatum X & Z minorem eſſe 2, maiorem 18.

Nota hic, ſi manentibus cæteris, in problematis titulo propoſitis, P ſit 3: atque differentia X & Z ſit 8; tunc adhibendo ſecundam ſolutionem inuenies 1 *a* 1 = 1, ex quo patet, 1 *a* 1 non minus ſignificare poſſe vnitatem, quam alium quemuis numerum: quod vt magis pateat, in aliquot ſequentibus problematibus, aſſumo exempla hanc veritatem confirmantia: cuius notitia ſuo tempore ſeruiet.

Problema VI.

TRes quantitates X, P, Z, ſint proportionales, & cognoſcatur P: item aggregatum X & Z. Ex. gr. P ſit 3, & aggregatum X & Z ſit 10.

Oporteat inuenire X & Z.

Prima ſolutio. Quoniam X, P, Z per hypotheſim ſunt proportionales, X *in* Z = P *q* ♎ 9: ergo X *in* Z = 9. Deinde per hypotheſim aggregatum X & Z eſt 10: ergo per problema 3. cap. 2. inuenies quantitatum X & Z, minorem eſſe 1, maiorem eſſe 9.

Secunda ſolutio. X ſit 1 *a* 1: ergo *Z* erit 10 − 1 *a* 1: ergo 1 *a* 1 *in* 10 − 1 *a* 1 = 9: ergo 10 *a* 1 − 1 *a* 2 = 9. Reſoluendo hanc æquationem compoſitam, inuenies 1 *a* 1 = 1, quantitatum X & *Z* minorem eſſe, 1; maiorem eſſe 9.

Problema VII.

TRes quantitates X, P, Z, sint proportionales, & cognoscatur aggregatum quadratorum X, P, Z. Item quantitas X nota sit. Ex. gr. X sit 25, & aggregatum quadratorum X, P, Z, sit 651.

Oporteat inuenire P & Z.

Prima solutio. Per hypothesim X, P, Z, sunt proportionales: ergo per theorema 2. Appendicis $\frac{1}{2}$ $X \dagger Z\,q = X\,2 \dagger P\,2 \dagger Z\,2 - \frac{3}{4}$ $X\,2$: sed per hypothesim $X\,2 = 625$: adeoque $\frac{3}{4}$ $X\,2 = 468\ \frac{3}{4}$: item $X\,2 \dagger P\,2 \dagger Z\,2 = 651$: ergo $\frac{1}{2}$ $X \dagger Z\,q = 651 - 468\ \frac{3}{4}$ Ω $182\ \frac{1}{4}$: ergo $\frac{1}{2}$ $X \dagger Z = 13\ \frac{1}{2}$: atqui per hypothesim $\frac{1}{2}$ $X = 12\ \frac{1}{2}$: ergo $Z = 1$. Ergo X *in* Z $= 25$ *in* $1\ \Omega\ 25$: sed quia per hypothesim X, P, Z, sunt proportionales X *in* Z $= P\,q$: ergo $P\,q = 25$: ergo $P = 5$; igitur X erit 25; & P erit 5; denique Z erit 1.

Secunda solutio. Z sit $1a1$: ergo $Z\,q = 1a2$. ergo per hypothesim $P\,q = 651 - 625 - 1a2\ \Omega\ 26 - 1a2$: sed Xq, Pq, Zq sunt quantitates proportionales, cum per hypothesim X, P, Z, sint proportionales: ergo 625 *ad* $26 - 1a2 = 26 - 1a2$ *ad* $1a2$: ergo per theorema 5. cap. 8. lib. 1. etiam 625 *in* $1a2 = 26 - 1a2q$: ergo $625a2 = 676 \dagger 1a4 - 52a2$: ergo $625a2 \dagger 52a2 - 1a4 = 676$: ergo $677a2 - 1a4 = 676$. Resoluendo hanc compositam æquationem, inuenies $1a1 = 1$. Item $P = 5$: igitur vt prius, X erit 25; item P erit 5; denique Z erit 1.

Problema VIII.

TRes quantitates X, P, Z, sint proportionales, & cognoscatur aggregatum quadratorum X, P, Z. Item aggregatum X & Z. Ex. gr. aggregatum quadratorum X, P, Z, sit 21. Item aggregatum X & Z sit 5.

Oporteat inuenire X, P, Z.

Pri-

Prima solutio. Per hypothesim X, P, Z, sunt quantitates proportionales, ergo per theor. 2. Appendicis P2 = X † Zq − $X2$ − P2 − $Z2$: atqui per hypothesim X † $Z\,q$ = 25: & insuper X 2 † P 2 † Z2 = 21: ergo P 2 = 25 − 21: ergo P 2 = 4: ergo P = 2. Præterea quia per hypothesim X, P, Z, sunt proportionales, per theorema 5. cap. 8. lib. 1. X *in* Z = P 2: ergo X *in* Z = 4: atqui per hypothesim X † Z = 5: ergo per problema 2. cap. 2. inuenies X = 1, & Z = 4: igitur X erit 1; & P erit 2; denique Z erit 4. Vel certè X erit 4, P erit 2, & Z erit 1.

Secunda solutio. X sit 1 *a* 1: ergo Z erit 5 − 1 *a* 1: ergo Xq erit 1 *a* 2; & $Z\,q$ = 25 † 1 *a* 2 − 10 *a* 1. Præterea quia per hypothesim X, P, Z, sunt proportionales X *in* Z = P *q*: sed X *in* Z = 1 *a* 1 *in* 5 − 1 *a* 1: ergo P *q* = 1 *a* 1 *in* 5 − 1 *a* 1 ♎ 5 *a* 1 − 1 *a* 2: atqui per hypothesim X 2 † P 2 † Z 2 = 21: ergo 1 *a* 2 † 25 † 1 *a* 2 − 10 *a* 1 † 5 *a* 1 − 1 *a* 2 = 21: ergo 1 *a* 2 † 25 − 5 *a* 1 = 21: ergo 1 *a* 2 − 5 *a* 1 = 21 − 25: ergo 1 *a* 2 − 5 *a* 1 = − 4. Resoluendo hanc compositam æquationem inuenies 1 *a* 1 = 1; & quia X † Z = 5, etiam Z = 4; denique quia X *in* Z = 4, etiam P *q* = 4: adeoque P = 2. Quare X erit 1; & P erit 2; denique Z erit 4. Vel certè X erit 4, P erit 2, & Z erit 1.

Problema IX.

TRes quantitates X, P, Z, sint proportionales, & cognoscatur aggregatum quadratorum X, P, Z. Item quantitas P sit cognita.

Ex. gr. Aggregatum quadratorum X, P, Z, sit 91, & P sit 3. Oporteat inuenire X & Z.

Prima solutio. Per hypothesim X, P, Z, sunt proportionales: per theorema 2 Appendicis, P 2 = X † $Z\,q$ − X 2 − P 2 − Z 2: atqui per hypothesim P = 3: adeoque P 2 = 9: & insuper X 2 † P 2 † Z 2 = 91: ergo 9 = X † $Z\,q$ − 91: ergo 9 † 91 = X † $Z\,q$: ergo 100 = X † $Z\,q$: ergo 10 = X † Z. Præterea etiam X *in* Z = P 2, quandoquidem per hypothesim X, P, Z, sint proportionales: cum igitur P 2 = 9, etiam X *in* Z = 9: ergo per problema 2. cap. 2. inuenies X esse 1 & Z esse 9. Vel X esse 9, & Z esse 1.

Secunda solutio. X sit 1 *a* 1: ergo X 2 = 1 *a* 2: & etiam per hypothesim P 2 = 9: igitur cum per hypothesim X 2 † P 2 † Z 2 = 91, etiam 91 − X 2 − P 2 = Z 2: ergo etiam Z 2 =

91

91 — 9 — 1*a*2 ♎ 82 — 1*a*2. Quia vero per hypotheſim X,P,Z, ſunt proportionales: etiam X 2, P 2, Z 2, ſunt quantitates proportionales: ergo per theorema 5. cap. 8. X 2 *in* Z 2 = P 2*q*: ergo etiam 1*a*2 *in* 82 — 1*a*2 = 9 *in* 9: ergo 82*a*2 — 1*a*4 = 81; reſoluendo hanc æquationem compoſitam 1*a*1 = 1: ergo X = 1: ſed etiam P = 3 adeoque Z = 9: ergo quantitatum X & Z minor eſt 1, maior 9.

Appendix.

QVandoquidem priores duos Logiſticæ noſtræ libros cogar præmittere, & reliquorum impreſſionem aliquantulum differre: hic apponere debui, nonnulla, ex poſterioribus libris deſumpta, atque ad anteriorum librorum intelligentiam magis neceſſaria: talia ſunt theoremata quibus vtor in aliquibus ſolutionibus problematum libro ſecundo propoſitorum; præterea paulo accuratior declaratio ſignificationum, quæ conueniunt ſignis † vel —, aut numeris, qui his ſignis affecti appellantur poſitiui, aut negatiui, & quia ad duo capita reducuntur, quæ hic remanent proponenda, præſentem appendicem diſtinguo in duas partes, in priori parte propono theoremata, quibus vtor in ſecundo libro, hæc theoremata ſunt ex eo genere, quæ à nobis vniuerſalia appellantur, quamobrem paucis etiam expono, quid ſint theoremata vniuerſalia, & quomodo differant ab ijs quæ à nobis appellantur Geometrica, vel Arithmetica; ex hac prima appendicis parte aliquo modo licebit proſpicere, ad quam amplitudinem, atque vniuerſalitatem aſſurgere debeat noſtra Logiſtica, hactenus, ſaltem quo ad apparentiam, ſatis anguſtis limitibus circumſcripta. In ſecunda parte ago de ſignificatione ſignorum † vel —, atque numerorum, qui his ſignis affecti, dicuntur poſitiui, aut negatiui.

PARS PRIMA.

IN hac prima parte, prius pauca notantur circa Theoremata, atque Problemata, quæ à nobis appellantur vniuerſalia, ex quibus deinde nonnulla proponuntur.

1 Vt breuiter, ſed tamen intelligibiliter exponam, quid intelligam per propoſitiones vniuerſales, & quomodo vniuerſales propoſitiones ab illis differant, quas appello Geometricas, aut Arithmeticas, conſiderandæ ſunt ſequentes definitiones.

Magnitudo vniuerſalis, eſt illa magnitudo, quæ adæquatè diuiditur in magnitudinem extenſionis, & magnitudinem diſcretionis. Per magnitudinem extenſionis, intelligimus illam formam, à qua ſubiectum poteſt dici magis, vel minus extenſum altero ſubiecto. Ab hac magnitudine extenſionis, dicitur. Ex. gr. vna linea maior, vel minor altera linea. Item vna ſuperficies, dicitur maior, vel minor altera ſuperficie. Item vnum corpus, dicitur maius vel minus altero corpore. Item vna domus, dicitur maior vel minor altera domo, aut muro, aut feneſtra, atque ita de alijs. Magnitudo diſcretionis, appellatur illa forma, à qua ſubiectum dicitur magis, vel minus diſcretum altero ſubiecto. Ab hac magnitudine diſcretionis, dicitur Ex.gr. vnitas, minor quouis aggregato vnitatum. Item quoduis aggregatum vnitatum, dicitur maius vnitate. Item quoduis vnitatum aggregatum, dicitur maius vel minus altero vnitatum aggregato. Item vna pluralitas, aut multitudo dicitur maior, vel minor altera pluralitate, aut multitudine. Item vnus exercitus dicitur maior, vel minor altero exercitu, aut legione, aut cohorte, & ſic de cæteris. Vbi aduerti poteſt quod voces diſcretum, & diſcretio, deriuantur à verbo diſcernere, quemadmodum voces diuiſum, & diuiſio deriuantur à verbo diuidere; & voces terminatum, & terminatio, deriuantur à verbo terminare; immo hic idem ſignificant voces terminatio, diuiſio, & diſcretio: atque illa magnitudo quæ dependet à diuiſione, aut terminatione, aut diſcretione, à nobis appellatur magnitudo diſcretionis; quemadmodum magnitudo extenſionis dicitur illa, quæ dependet ab extenſione. In hunc modum expoſitis vocibus quibus vtimur, vt noſtrum de diuerſis quantitatibus de quibus hic agimus, conceptum exponamus, affero dictarum quantitatum definitiones.

Quantitas vniuerſalis, eſt concretum magnitudinis vniuerſalis; ſiue ſubiectum habens magnitudinem vniuerſalem.

Quantitas continua, eſt concretum extenſionis, ſiue ſubiectum habens magnitudinem extenſionis.

Quantitas diſcreta, eſt concretum diſcretionis; ſiue ſubiectum habens magnitudinem diſcretionis.

Ex his definitionibus facile colligitur, quod quantitas vniuerſalis differat à quantitate cõtinua, & diſcreta, quemadmodum animal differt à bruto & homine: & præterea quod quantitas continua differt à diſcreta, ſicut homo differt à bruto: adeo vt omnes quantitatis vniuerſalis proprietates, ità continuæ & diſcretæ quantitati ſint communes, quemadmodum animalis proprietates tam homini, quàm

bruto communes ſunt; & præterea nulla quantitas continua poſſit dici diſcreta, ſicut nullus homo poteſt dici brutum.

Circa quantitatem vniuerſalem diſcurſus inſtituere, atque eius proprietates examinare, propriè ſpectat ad Matheſim vniuerſalem: quæ adæquatè diuiditur in Geometriam, & Arithmeticam; ad Geometriam propriè ſpectat diſcurſus inſtituere circa quantitatem continuam, atque eius proprietates examinare; ad Arithmeticam propriè ſpectat diſcurſus inſtituere circa quantitatem diſcretam, atque eius proprietates examinare. Hinc propoſitiones, aut demonſtrationes erunt vniuerſales, ſi agant de quantitate vniuerſali: erunt Geometricæ, ſi agant de quantitate continua: denique erunt Arithmeticæ, ſi agant de quantitate diſcreta.

An compendiosè hic propoſitæ definitiones, aut aſſertiones differant, vel non differant à ſenſu, aut antiquorum, aut modernorum, hoc loco non vacat diſputare, vbi vnica cura mea eſt, non vt aliorum, ſed vt ſenſum meum breuiter, atque intelligibiliter aperiam. De proportione etiam hic nihil addo, etenim in elementis ſatis meum de proportionibus ſenſum expoſui, atque inter cætera dixi, proportionem eſſe quantitatem; quod tamen vox quantitas adhibeatur ad ſignificandam quantitatem abſolutam, ſiue independenter à reſpectu ad aliam eiuſdem generis quantitatem comparatione cuius dicitur magis, vel minus magna: verum quod vox proportio adhibeatur ad ſignificandam quantitatem relatiuam, ſiue dependenter à reſpectu ad aliam eiuſdem generis quantitatem comparatione cuius dicitur magis, vel minus magna.

Quemadmodum Geometria tota conſiſtit in propoſitionibus, atque diſcurſibus Geometricis, & Arithmetica tota conſiſtit in propoſitionibus, atque diſcurſibus Arithmeticis, ita in propoſitionibus, & diſcurſibus vniuerſalibus conſiſtit tota Matheſis vniuerſalis. Propoſitiones, ſiue illæ ſpectent ad vniuerſalem Matheſim, ſiue ad Geometriam, ſiue ad Arithmeticam, diſtinguuntur in theoremata, & problemata. Theorema dicitur illa propoſitio, in qua proponitur aliqua veritas ſpeculatiua: problema vocatur propoſitio in qua aliquid faciendum proponitur.

De vtilitate propoſitionum vniuerſalium plura erunt dicenda ſequentibus libris, interim hic notari poteſt, quod quælibet propoſitio vniuerſalis, ad minus duabus alijs æquiualeat, quarum vna ſit Geometrica, altera Arithmetica: & tamen non raro vniuerſalis propoſitio compendioſius euincit illud, quod vel ſola Geometrica, vel ſola Arithmetica propoſitio, non niſi difficilius, aut minus compendiosè poſſet euincere; quod vt aliquo modo

appareat, nonnullis ex ſequentibus theorematibus notam adijcio, indicantem Geometricam propoſitionem, quam ſua vniuerſalitate complectitur theorema.

Cæterum, vix aliqua theoremata hic proponuntur, præter illa, quibus vtor in ſolutionibus problematum propoſitorum cap. 2. & 3. huius libri, circa demonſtrationes quas theorematibus appono, aduertendum quod in his ſupponatur doctrina libro primo tradita, tametſi hactenus legitimis demonſtrationibus ſtabilita non ſit; verum id obeſſe non poteſt fini à nobis intento, quandoquidem hoc loco non alia de cauſa theorematibus addiderim demonſtrationes niſi vt Logiſticæ noſtræ ſtudioſus, iam aliquo modo verſatus in vſu regulæ Logiſticæ, atque problematum ſolutionibus, ſaltem viam videat, quam tenemus in demonſtrandis theorematibus vniuerſalibus. Præterea, vt etiam aliquod ſpecimen habeat ſolutionum vniuerſalium, quæ problematibus vniuerſalibus conuenire poſſunt: theorematibus vniuerſalibus, addo pauca problemata vniuerſalia, atque ex ſuperioribus capitibus deſumpta, vbi vel non vniuerſaliter propoſita fuerunt, vel certè non vniuerſaliter ſoluta. Hinc etiam non leui fructu diſci poterit, quomodo cætera ſuperioribus capitibus propoſita problemata, reddi poſſint vniuerſalia; cur vero ſingula vniuerſaliter proponere noluerim, hæc cauſa eſt, quod mihi propoſitum eſſet Logiſticam docere, non vero quos vberimos affert, fructus ex illa colligere.

Theorema I.

QValeſcunque fuerint quantitates A & B.

1. Dico A 2 + B 2 & + A *in* 2 B = A + B *q*.
2. Dico A 2 + B 2 & − A *in* 2 B = A − B *q*.
3. Dico A − B *q* & + A *in* 4 B = A + B *q*.
4. Dico A 2 − B 2 *per* A − B = A + B.
5. Dico A 2 − B 2 *per* A + B = A − B.
6. Dico A + B *q in* A − B *q* = A 2 − B 2 *q*.

Demonſtratur.

PRima pars. Per cap. 1. lib. 1. A + B *q*. = A + B *in* A + B: atqui per cap. 3. lib. 1. etiam A + B *in* A + B = A 2 + B 2 & +

A *in* 2 B : ergo etiam A 2 † B 2 & † A *in* 2 B = A † B *q*. Quod erat primum.

Secunda pars. Patet diſcurſu planè ſimili quo primam probauimus. Nam per cap. 1. lib. 1. A − B *q* = A − B *in* A − B : atqui per cap. 3. lib. 1. Etiam A − B *in* A − B = A 2 † B 2 & − A *in* 2 B : Ergo A 2 † B 2 & − A *in* 2 B = A − B *q*. Quod erat ſecundum.

Tertia pars. Per ſecundam partem A 2 † B 2 & − A *in* 2 B = A − B *q* : ergo per Antitheſim A 2 † B 2 = A − B *q* & † A *in* 2 B : ergo vtrinque addendo A *in* 2 B, etiam A 2 † B 2 & † A *in* 2 B = A − B *q* & † A *in* 4 B : atqui per primam partem A 2 † B 2 & † A *in* 2 B = A † B *q* : ergo etiam A − B *q* & † A *in* 4 B = A † B *q*; quod erat tertium.

Quarta, & quinta pars. Per caput 3. lib. 1. patet quod A − B *in* A † B = A 2 − B 2 : ergo per theorema 8 cap. 8. lib. 1. etiam A 2 − B 2 *per* A − B = A † B; & præterea etiam A 2 † B 2 *per* A † B = A − B, vt quarto, & quinto loco aſſerebatur.

Sexta pars. Per cap. 3. lib. 1. A † B *in* A − B = A 2 − B 2 : ergo etiam A † B *in* A − B = A 2 − B 2 *in* 1 : ergo per theorema 4: cap. 8. lib, 1. 1 *ad* A † B = A − B *ad* A 2 − B 2 : ergo etiam 1 *q ad* A † B *q* = A − B *q ad* A 2 − B 2 *q* : ergo per theorema 4. cap. 8. lib, 1. etiam A † B *q in* A − B *q* = A 2 − B 2 *q in* 1 *q* : ſed A 2 − B 2 *q in* 1 *q* = A 2 − B 2 *q* : ergo A † B *q in* A − B *q* = A 2 − B 2 *q*: quod erat ſextum.

Nota, quod prima aſſertio huius theorematis contracta ad quantitates continuas, ac planas, ſiue ad rectangula, non differat à prop. 7. cap. 4. elementorum, quæ apud Euclidem eſt prop. 4. lib. 2.

Theorema II.

TRes qualeſcunque quantitates A, B, C, ſint proportionales.

1. Dico $\frac{1}{2}$ A † C *q* = A 2 † B 2 † C 2 − $\frac{3}{4}$ A 2.
2. Dico A † C *q* = A 2 † 2 B 2 † C 2.
3. Dico B 2 = A † C *q* − A 2 − B 2 − C 2.

De-

Demonstratur.

PRima pars. Per cap. 3. lib. 1. $\frac{1}{2}$ A † C q = $\frac{1}{4}$ A 2 † C 2 & † A *in* C: sed quoniam per hypothesim A, B, C, sunt proportionales, per theorema 5. cap. 8. lib. 1. A *in* C = B 2: ergo $\frac{1}{2}$ A † C q = B 2 † C 2 † $\frac{1}{4}$ A 2: atqui B 2 † C 2 † $\frac{1}{4}$ A 2 = A 2 † B 2 † C 2 − $\frac{3}{4}$ A 2: ergo $\frac{1}{2}$ A † C q = A 2 † B 2 † C 2 − $\frac{3}{4}$ A 2, quod erat primum.

Secunda pars. Per cap. 3. lib. 1. A † C q = A 2 † C 2 & † A *in* 2C: sed quoniam per hypothesim A, B, C, sunt proportionales per theorema 5. cap. 8: lib. 1. etiam A *in* 2 C = 2 B 2: ergo A † C q = A 2 † 2 B 2 † C 2, quod erat secundum.

Tertia pars. Par secundam partem A 2 † 2 B 2 † C 2 = A † C q: ergo per Antithesim B 2 = A † C q − A 2 − B 2 − C 2, quod erat tertium.

Theorema III.

QValescunque fuerint quantitates A, B, C, ita tamen vt A = B † C.

Dico A 2 = A † B *in* C & † B 2.

Demonstratio. Per hypothesim A = B † C: ergo vtrinque addendo B, etiam A † B = 2 B † C: ergo etiam A † B *in* C = 2 B † C *in* C: ergo vtrinque addendo B 2, etiam A † B *in* C & † B 2 = 2 B † C *in* C & † B 2: sed per cap. 3. lib. 1. 2 B † C *in* C & † B 2 = B 2 † C 2 & † C *in* 2 B: ergo A † B *in* C & † B 2 = B 2 † C 2 & † C *in* 2 B: atqui etiam B † C q = B 2 † C 2 & † C *in* 2 B: ergo B † C q = A † B *in* C & † B 2: sed etiam A 2 = B † C q, cum per hypothesim A = B † C: ergo A 2 = A † B *in* C & † B 2, quod erat demonstrandum.

Nota hoc theorema contractum ad rectiangula conuenire cum coroll. prop. 7. cap. 6. element. siue cum prop. 5. lib. 2. Euclidis.

Theo-

Theorema IV.

QValeſcunque fuerint quantitates A,B,C, ita tamen vt A = B. Dico B + C *q* = A + B + C *in* C & + B 2.

Demonſtratio. Per hypotheſim A = B: ergo vtrinque addendo B + C, etiam A + B + C = 2 B + C: ergo A + B + C *in* C = 2 B + C *in* C: ergo vtrinque addendo B 2, etiam A + B + C *in* C & + B 2 = 2 B + C *in* C & + B 2: ſed 2 B + C *in* C & + B 2 = B 2 + C 2 & + C *in* 2 B ergo etiam A + B + C *in* C & + B 2 = B 2 + C 2 & + C *in* 2 B: atqui etiam B + C *q* = B 2 + C 2 & + C *in* 2 B: ergo B + C *q* = A + B + C *in* C & + B 2, quod erat demonſtrandum.

Nota hoc theorema contractum ad rectangula, conuenire cum coroll.prop.10. cap.6. elementorum, ſiue cum prop.6.lib.2. Euclidis.

Hæc pauca theoremata vniuerſalia, ſufficient ad intelligentiam eorum, quæ circa eiuſmodi theoremata initio huius appendicis breuiter annotauimus; reliquum eſt, vt etiam afferamus aliqua problemata vniuerſalia, ex quibus lucem accipiant, reliquæ notæ ſpectantes ad problemata vniuerſalia.

Problema I.

DVæ quantitates X & Z ſint ignotæ, cognoſcatur tamen differentia X & Z: item aggregatum X & Z.

Ex.gr. differentia X & Z ſit F. & aggregatum X & Z ſit G. Oporteat inuenire quantitates X & Z.

Solutio. Quantitatum X & Z minor ſit 1 *a* 1 ergo maior erit 1 *a* 1 + F: ergo 2 *a* 1 + F = G: ergo 2 *a* 1 = G − F: ergo 1 *a* 1 = $\frac{1}{2}$ G − $\frac{1}{2}$ F. Quandoquidem igitur quantitatum X & Z minor ſit 1 *a* 1, patet quantitatum X & Z, minorem æquari aggregato ex dimidia differentia X & Z, atque dimidio aggregato X & Z; & ſi minori addatur differentia X & Z habetur maior.

Problema hoc non differt à problemate 1.cap.1. niſi quod hic vniuerſaliter propoſitum ſit, atque ſolutum: illic vero Arithmeticè tantum fuerit propoſitum, atque ſolutum.

Pro-

Problema II.

DVæ quantitates X & Z sint ignotæ cognoscatur tamen aggregatum X & Z: item productum ex X ducto in Z.

Ex. gr. X † Z = F. Item X *in* Z = G.

Oporteat inuenire quantitates X & Z.

Solutio. X − Z sit 1 *a* 1: ergo X − Z *q* = 1 *a* 2: atqui per theorema 1. hic, X − Z *q* & † X *in* 4 Z = X † Z *q*: ergo 1 *a* 2 & † X *in* 4 Z = X † Z *q*: atqui per hypothesim X *in* 4 Z = 4 G, & insuper X † Z *q* = F2: ergo 1 *a* 2 † 4 G = F 2: ergo 1 *a* 2 = F2 − 4G: ergo 1*a*1 = 1 R 1 * F2 − 4G: ergo X − Z = 1R1 * F2 − 4 G: ergo differentia X & Z = 1 R 1 * F 2 − 4G: in qua æquatione, quia ex hypothesi cognoscitur secunda pars, etiam prima, hoc est differentia X & Z fit cognita. Deinde per hypothesim etiam cognoscitur aggregatum X & Z: quare per prob. 1. inuenitur X & Z.

Hoc problema non differt à problemate 2. cap. 2. nisi quod hic vniuersaliter propositum, & solutum sit, illic vero bis proponatur, semel restrictum ad numeros, semel ad rectangula, & solutio quæ affertur est Arithmetica.

Problema III.

TRes quantitates X, P, Z sint proportionales: & cognoscatur aggregatum quadratorum X, P, Z: item quantitas P cognita sit.

Ex. gr. Aggregatum quadratorum X, P, Z sit F, & insuper P = G.

Oporteat inuenire quantitates X & Z.

Solutio. Per hypothesim X, P, Z, sunt proportionales: ergo per theorema 2. hic, P 2 = X † Z *q* − X 2 − P 2 − Z 2: atqui per hypothesim X 2 † P 2 † Z 2 = F, & insuper P 2 = G 2: ergo G 2 = X † Z *q* − F: ergo G 2 † F = X † Z *q*: ergo X † Z = 1 R 1 * G 2 † F: in qua æquatione, quia ex hypothesi cognita est secunda pars, etiam innotescit prima pars, nimirum X † Z. Præterea etiam cognoscitur X *in* Z, quandoquidem X *in* Z = P 2, quia X, P, Z, sunt proportionales: igitur per prob. 2. inuenitur X & Z.

Hoc

Hoc problema non differt à problemate 9. cap. 2. niſi quod hic vniuerſaliter ſolutum ſit, illic Arithmeticè ſoluatur.

Ex his tribus problematibus, eorumque ſolutionibus, ſatis vt opinor apparet quid ſint problemata vniuerſalia, atque ſolutiones vniuerſales. Verum fortaſſis in vniuerſalibus ſolutionibus hactenus nullus fructus apparet, ſed paulo maior obſcuritas. Fateor per numeros magnitudines exponere aſſueti, per numeros expoſitas, aut indicatas magnitudines facilius aſſequimur, & hinc numeros retinendos puto, vbi nulla vtilitate relinquuntur, aut ſeponuntur: vt vero eiuſmodi vtilitatem aliquam videas', ex ſolutionibus vniuerſalibus reſultantem: nota ex tribus vniuerſalibus problematum ſolutionibus haberi totidem Theoremata vniuerſalia non planè contemnenda, quæ hic adijcio.

Theorema ex primo problemate deductum.

Sint duæ qualeſcunque quantitates X, Z; præterea $Z - X = F$. Item $X + Z = G$.

Dico $X = \frac{1}{2} G - \frac{1}{2} F$.

Demonſtratio immediatè patet, ex ſolutione primi problematis.

Theorema ex ſecundo problemate deductum.

Sint duæ qualescunque quantitates, minor X maior Z, præterea $X + Z = F$. Item X *in* $Z = G$.

Dico $Z - X = 1\,R\,1 * F2 - 4G$.

Demonſtratio immediatè patet, ex ſolutione ſecundi problematis.

Theorema ex tertio problemate deductum.

Tres qualeſcunque quantitates X, P, Z, ſint proportionales, & $X2 + P2 + Z2 = F$. Item $P = G$.

Dico $X + Z = 1\,R\,1 * G2 + F$.

Demonſtratio immediatè patet, ex ſolutione tertij problematis.

PARS SECVNDA.

In qua exponitur ſignificatio ſignorum + & −, atque etiam numerorum, qui his ſignis affecti, dicuntur poſitiui, vel negatiui.

QVandoquidem paucis verbis, ſatis intelligibiliter exponi non poſſit, ſignificatio ſignorum + vel −, aut numerorum, qui prædictis ſignis affecti appellantur poſitiui, vel negatiui: magis accurata expoſitio horum ſignorum, atque numerorum, à me reſeruata fuerat pro ſubſquentibus libris: cum quibus differri non poterant quæ hic proponimus: vix enim aliquid frequentius recurrit in noſtra Logiſtica, quam vſus dictorum ſignorum, atque numerorum, atque adeo illorum expoſitio non immerito requiri poterat, etiam ab illis, qui adhuc primis Logiſticæ noſtræ elementis incumbunt, præſertim cum ipſis non difficulter occurrere poſſint dubia ſequenti ſimilia.

Quemadmodum nihil magnum, vel paruum, vel etiam maius, aut minus dici poteſt, niſi comparatione facta ad aliud, reſpectu cuius dicatur magnum, paruum, maius, minus: ita etiam nihil dici poteſt plus, vel minus, niſi comparatione facta ad aliud reſpectu cuius dicatur plus, aut minus: & tamen his legibus minimè conformes loqutiones adhibentur in Logiſtica. Ex. gr. quando dicimus + 3. eſſe numerum poſitiuum. Item − 3 eſſe numerum negatiuum. Item 10 − 12 = − 2. Item − 14 = − 22 + 8. In his alijſque ſimilibus exemplis apparet, quomodo numeri dicantur plus, vel minus, licet nihil ſignificetur quo plus, vel minus dicantur; ſic in vltimo exemplo, nihil ſignificatur quo minus ſit, aut quatuordecim, aut viginti duo, & tamen tam numerus 14, quam 22, minus dicuntur. Item nihil ſignificatur quo plus ſit octo, & tamen 8 dicitur plus.

Ne huiuſmodi difficultates alicui occurrentes; perturbent noſtræ Logiſticæ ſtudioſum, atque vlteriorem progreſſum impediant, volui hoc loco, paulò fuſius proponere, & exponere ſignificationem prædictorum ſignorum, atque numerorum; in quem finem.

Notandum primò. Signa + & − duplex officium habere, ſiue

ſiue duplici modo conſiderari poſſe in ſcriptione Logiſtica. Primò enim conſiderari poſſunt in quantũ ſimpliciter ſunt ſigna poſitiua, vel negatiua, ſiue in quantum indicant poſitiuum, vel negatiuum eſſe numerum cui immediatè præponuntur. Secundò conſiderari poſſunt, vt ſunt characteres compoſitionis, atque connectunt duos numeros, inter quos interponuntur.

Signa † & − conſiderata in quantũ ſimpliciter ſunt ſigna poſitiua, vel negatiua, licet exprimantur per voces, plus aut minus, non tamen ſignificant cõparationem cum aliquo, ſed tantum ſignificant, vtrum numerus quem afficiunt poſitiuus ſit, vel negatiuus, hoc eſt, an indicet vnitates poſitiuas, vel negatiuas: adeo vt † 3, ſignificet tres vnitates poſitiuas. Item − 3, ſignificet tres vnitates negatiuas; & quando dicitur, plus tria eſt numerus poſitiuus, ſignificatur idem ac ſi diceretur, tres vnitates poſitiuæ faciunt numerum poſitiuum.

Signa † & − conſiderata in quantum ſunt characteres compoſitionis, non habent interſe diuerſam ſignificationem, ſed vtrumque ſignum rectè exprimi poſſet per voces, *& prætereà*, *& inſuper*, *ſimul cum*, aut per alias voces his æquiualentes, quibus connectitur illud quod præcedit, cum eo, quod ſubſequitur. Ex. gr. 4 † 3, ſignificat quatuor vnitates poſitiuas, & inſuper tres vnitates poſitiuas. Item 4 − 3, ſignificat quatuor vnitates poſitiuas, & inſuper tres vnitates negatiuas.

Conſideremus modo æquationes paulò antè propoſitas pro exemplis, & videamus quem ſenſum reddant voces quibus leguntur. Prima æquatio erat talis, − 14 ≃ − 22 † 8, quæ ſcriptio, legitur, minus quatuordecim, æquatur minus vigintiduo, plus octo. Senſus quem reddunt hæ voces, eſt talis; quatuordecim vnitates negatiuæ æquantur vigintiduabus vnitatibus negatiuis, ſumptis ſimul cum octo vnitatibus poſitiuis. Altera æquatio erat talis; 10 − 12 ≃ − 2. Quæ ſcriptio, ita legitur. Decem minus duodecim, æquatur minus duo. Senſus quem reddunt hæc verba quibus ſcriptio exprimitur, eſt talis; decem vnitates poſitiuæ, ſimul cum duodecim vnitatibus negatiuis, æquantur duabus vnitatibus negatiuis. Hæc vltima æquatio etiam ſic ſcribi poteſt, − 12 † 10 ≃ − 2. Quæ ſcriptio ita legitur; minus duodecim, plus decem, æquatur minus duo. Quæ verba hunc ſenſum reddunt; duodecim vnitates negatiuæ, ſimul cum decem vnitatibus poſitiuis æquantur duabus vnitatibus negatiuis. Si poſtremas duas æquationes ſimul conferas, aduertes, in penultima characterem compoſitionis eſſe ſignum minus: in vltima vero characterem compoſitionis eſſe ſignum plus: atque adeo duas illas æquationes interſe differre quò ad characte-

rem compoſitionis : nihil tamen interſe differre ſenſus quos reddunt voces quibus dictæ æquationes exprimuntur : atque adeo diuerſos illos characteres compoſitionis, eundem ſenſum reddere, vt paulò antè diximus.

Ex his ſatis patet ſignificatio ſignorum † & —, aut vocum quibus ſigna illa exprimuntur : & inſuper quod non ſignificent aliquid comparatiuum, vt male ſupponitur in diſcurſu initio propoſito ; ex quo etiam patet, tali diſcurſu nihil probari quod nobis aduerſetur. Reliquum eſt, vt videamus quid ſint vnitates illæ poſitiuæ,aut negatiuæ : & conſequenter quid ſint numeri poſitiui,aut negatiui.

Numerus poſitiuus dicitur, qui numerat vnitates poſitiuas, hoc eſt, vnitas poſitiua, vel poſitiuarum vnitatum pluralitas.

Numerus negatiuus dicitur, qui numerat vnitates negatiuas, hoc eſt, vnitas negatiua, vel negatiuarum vnitatum pluralitas.

Vnitas poſitiua appellatur, quælibet vnitas quam placet indicare per vnitatem ſcriptam ſine ſigno — : quod ſignum in vulgari Arithmetica non adhibetur, & hinc omnes,& ſingulæ vnitates expreſſæ,per ſolas notas vſitatas in vulgari Arithmetica,ſunt vnitates poſitiuæ; quales vero ſint vnitates poſitiuæ quæ ſignificantur per notas Arithmeticas, pendet ab hypotheſi, in qua tales notæ adhibentur. Quod hic vlterius declarare non videtur neceſſarium, quandoquidem ſit aliquid commune,tam Logiſticæ noſtræ, quam vulgari Arithmeticæ,quæ in illa ſupponitur præcognita.

Vnitas negatiua appellatur, vnitas quæ ſignificat vnam negationem vnitatis poſitiuæ. Ex. gr. ſi vnitas poſitiua de qua agitur ſit vnus homo, tunc vnitas negatiua erit, vnus non homo. Si vnitas poſitiua ſit vnum ens, vnitas negatiua erit, vnum non ens. Si vnitas poſitiua ſit vnum non ens, vnitas negatiua erit, vna negatio vnius non entis, ſiue vnum ens; pro quo aduertendum, per notam Arithmeticam ſcriptam ſine ſigno minus, tam ſignificari poſſe vnum non ens, quam vnum ens; etenim per notas Arithmeticas ſignificari poteſt quidlibet, quod poteſt dici vnum; ex quo vlterius patet, eandem vnitatem, immo quamlibet vnitatem, independenter ab aliqua hypotheſi, indifferentem eſſe, vt appelletur poſitiua, vel negatiua; atque adeo negatiuas, & poſitiuas vnitates, æquè verè, ac propriè vnitates eſſe : hinc iterum ſequitur, quod numeri, qui negatiui appellantur, non minus verè, ac propriè dicantur numeri, quam illi, qui appellantur poſitiui.

Non parum proderit vlterius hic aduertere, quomodo interſe opponantur numeri poſitiui, & negatiui : ità vt inter illos quodam-

dammodo medium ſit nihil, ſiue negatio cuiuslibet vnitatis: à quo nihilo per vnitates poſitiuas, & negatiuas receditur, ſed verſus partes oppoſitas: quo enim plures vnitates poſitiuæ adduntur, magis receditur à nihilo; ſimiliter quo plures vnitates negatiuæ adduntur, etiam magis receditur à nihilo: hinc numerus † 3, & numerus — 3, æqualiter diſtant à nihilo, à quo ſinguli illi numeri diſtant tribus vnitatibus, ſed verſus partes oppoſitas: adeo vt duo illi numeri, magis diſtent interſe, quam ab ipſo nihilo; etenim vt † 3, reducatur ad nihil, ſufficit ex illo numero auferre tres vnitates poſitiuas, vel illi addere tres vnitates negatiuas. Vt vero numerus † 3, reducatur ad numerum — 3, neceſſe eſt ex numero † 3, auferre ſex vnitates poſitiuas, vel illi addere ſex vnitates negatiuas. Similiter vt numerus — 3, reducatur ad nihil, ſufficit ex illo auferre tres vnitates negatiuas, vel illi addere tres vnitates poſitiuas. Verum vt numerus — 3, reducatur ad numerum † 3: neceſſe eſt, ex numero — 3. auferre ſex vnitates negatiuas, vel illi addere ſex vnitates poſitiuas. Quod idem reſultet, ſiue poſitiuis vnitatibus addantur negatiuæ, ſiue auferantur poſitiuæ: & etiam idem reſultet, ſiue negatiuis vnitatibus addantur poſitiuæ, ſiue ab illis auferantur negatiuæ: fit ob prædictam oppoſitionem vnitatum poſitiuarum, & negatiuarum. Nam poſitiuis vnitatibus, negatiuas addere, eſt poſitiuis vnitatibus, addere negationes poſitiuarum vnitatum: quod nihil eſt aliud, quam auferre, ſiue deſtruere vnitates poſitiuas. Pari modo, negatiuis vnitatibus addere poſitiuas, eſt negationibus vnitatum poſitiuarum, addere poſitiuas vnitates, quod iterum nihil eſt aliud, quam deſtruere, ſiue auferre negationes, vel negatiuas vnitates.

Vt hic dicta de abſtractis vnitatibus poſitiuis, ac negatiuis, melius percipiantur, conſiderari poſſunt credita, & debita, quæ interſe non aliter opponuntur, quam numeri poſitiui, & negatiui: adeo vt non incongruè, credita vocari poſſent diuitiæ poſitiuæ: & debita dici poſſent diuitiæ negatiuæ. Inter ſtatum eius, qui tantum credita habet, & alterius ſtatum, qui tantum habet debita, datur ſtatus medius, nimirum illius, qui omnibus computatis, neque credita habet, neque debita: ad quem ſtatum pertinet etiam ille, qui & credita, & debita habet æqualia: hic enim computatis omnibus, neque credita habet, neque debita: ab hoc ſtatu medio: receditur, tam per credita, quam per debita: ſed quodammodo verſus partes oppoſitas: adeo vt ſtatus eius, qui habet tantum creditum trium aureorum, & ſtatus eius, qui habet tantum debitum trium aureorum, æqualiter diſtent, à prædicto ſtatu medio:

nimi-

nimirum tribus aureis ; ita tamen , vt illæ duæ æquales diſtantiæ , ſint veluti verſus partes oppoſitas , & magis diſtent interſe , quam diſtent á ſtatu medio ; etenim vt ſtatus eius , qui tantum habet creditum trium aureorum , reducatur ad ſtatum medium , ſufficit auferre creditum trium aureorum , vel illi addere debitum trium aureorum . Verum vt idem ſtatus eius, qui tantum habet creditum trium aureorum , reducatur ad ſtatum eius , qui tantum habet debitum trium aureorum, oportet auferre creditum ſex aureorum , vel illi addere debitum ſex aureorum . Similiter, vt ſtatus eius,qui non habet niſi debitum trium aureorum , reducatur ad ſtatum medium, ſufficit auferre debitum trium aureorum, vel illi addere creditum trium aureorum ; ſed vt idem ſtatus eius, qui non habet niſi debitum trium aureorum, reducatur ad ſtatum eius , qui non habet niſi creditum trium aureorum , neceſſe eſt auferre debitum ſex aureorum, vel illi addere creditum ſex aureorum . Quod autem idem reſultet , ſiue creditis addantur debita , ſiue à creditis auferantur credita : fit ob prædictam creditorum, & debitorum oppoſitionem . Etenim creditis addere debita , eſt quodammodo credita deſtruere , atque auferre . Similiter debitis addere credita , eſt debita deſtruere, atque auferre .

Hæc niſi fallor ſufficient ad requiſitam intelligentiam ſignorum † *&* –, aut numerorum, qui his ſignis afficiuntur , atque appellantur poſitiui, vel negatiui . His tamen vnum addo in gratiam Grammaticorum, nimirum, quod . Ex. gr. 4 † 3 , non minus legi poſſit, quatuor plus tria , quam quatuor plus tribus ; nam vox plus in ſcriptione Logiſtica non habet eam ſignificationem quam habet apud grammaticos , adeoque non ſubiacet illorum regulis ; immo vt hoc ipſum indicetur in ipſa enunciatione ſcriptionis Logiſticæ, fortaſſis præſtaret legere quatuor plus tria, quam quatuor plus tribus: cæterum hac in parte quiſque ſibi ſatisfaciat.

ADdo hic indicem in quo potiſſimum indicatur , quo loco exponantur illæ voces, quæ magis propriè videntur ſpectare ad noſtram Logiſticam , hunc enim requirere videbatur legentis commoditas , cui neceſſarium eſt voces intelligere , vt ſenſum aſſequatur : & licet magnæ molis liber non ſit , tamen incommodum foret in illo quærere expoſitiones vocum, quoties circa illas dubium occurrit : præſertim cum non ſucceſſiuè , atque eodem loco omnes exponantur.

INDEX.

FINIS.

Errores, qui Logiſticæ ſtudioſum turbare poſſent .

Pag. 20. lin. 6. habeant lege habeat . pag. 20. lin. 25. *4 o a o* 2, ve *4 o a o* 2 lege *4 o a* 2 vel *4 o a o* 2 . pag. 22. lin. 18. tanium lege tantum . pag. 26. lin. 25 . anthithefis lege antitheſis. pag. 32. lin. 7. qund lege quod . pag. 37. lin. 7. ſoluttonibus lege ſolutionibus . pag. 41. & 43. & 45. lin. 1. Caput ſeptimum lege Caput octauum. pag. 49. lin. 23. *9 a* 1 = 2 1 7 5 lege *9 a* 5 = 2 1 7 5. pag. 70. lin. 23. X 2 † Z 2 & † X *in* 2 Z lege X 2 † Z 2 & − X *in* 2 Z . pag. 85. lin. 18. A 2 † B 2 lege A 2 − B 2.

pag. 15. in exemplo x1. productum ex ſubtractione ſcribendum, vt hic ſequitur $25 \dagger \frac{23 - 4}{-22 \dagger 9} \quad -13 \dagger \frac{4 - 7}{-34 \dagger 8}$

LOGISTICAE AVTHOR

Mathematico amico S.

EX longioribus litteris tuis gratiſſimum mihi fuit intelligere, Logiſticæ meæ libellum tibi placuiſſe; quem ſi ea qua ſcribis animi voluptate perlegiſti, id tribuo tuæ erga me beneuolentiæ, cui quantum debeam probe ſcio; verum ignoro, an votis tuis potero ſatisfacere: conabor tamen reſpondere ad ſingula, quæ à me petis; in quem finem oportunum mihi viſum fuit, prolixioris epiſtolæ tuæ ſummam reducere ad quatuor diuerſa capita, quæ hic ſubſequuntur.

Primo. Gratularis mihi quod ad illorum partes acceſſerim, qui Algebra delectantur.

Secundo. Poſtulas, vt Theorematum, quæ capite octauo Libri primi Logiſticæ proponuntur, demonſtrationes tibi mittam.

Tertio. Scire deſideras, (verbis tuis vtor) quid ſingulare, & ſupra aliorum Algebriſtarum rationes mihi propoſuerim, cum id ex contextu apparere videatur.

Quarto. Inquiris, an in rigoroſis ſtrictiſque compoſitarum æquationum enodationibus, à cæteris diuerſam rationem ineam, an vero illorum veſtigijs inſiſtam.

Non epiſtolam requiris amice, ſed librum: immo vero binos à me libros petis; alterum quidem, qui reliquam Logiſticæ meæ partem amplectatur, quemque iam haberes, niſi alijs occupationibus fuiſſem implicatus; alterum vero, qui cum Algebra conferat meam Logiſticam; hanc prouinciam alijs relinquam; ne tamen tuis votis ac ſtudijs, omnino defuiſſe videar, ad ſingula poſtulata aliquid reſcribo, atque epiſtolam diuido in quatuor partes, quæ ordine reſpondent quatuor capitibus, à te mihi propoſitis, atque paulò ante enumeratis.

PARS PRIMA.

ANte omnia gratularis mihi, quod tandem ad illorum partes acceſſerim, qui Algebræ ſtudio delectantur: quod vbi legi in tuis

litteris, ſuſpicatus ſum te, vt inter amicos fieri ſolet, familiariter iocari, ex eo capite quod in mea Logiſticâ conſpexeris aliquot characteres ab Algebriſtis vſurpari ſolitos; quare ſimili ſtylo reſpondere decreueram, me necdum declinaſſe ad muſcarum aucupium. verum ex ijs, quæ à me poſtea inquiris, mihi anſam præbes dubitandi ne ſerio loquaris, & ne tibi exciderit quod alias coram de Algebra diſſeruimus, ac præſertim de damno, licet ſpecioſo, quod Algebræ doctores Matheſeos ſtudio afferunt, dum toti ſunt in obſcuris quæſtionibus, ſed inutilibus, ac ſuperfluis curiosè enodandis, atque in eo non vltra progredientes conſiſtunt, & bonas horas male conſumunt, quas melius impenderent, ſuperfluis ac parum vtilibus à Matheſi remouendis, aut perſcrutandis ſecretioribus eius arcanis; quare ſi conſilium tibi fuit me inter huiuſmodi Algebriſtas annumerare, non admitto gratulationes tuas. Præterea etiamnum fateor me non aſſequi quis fructus ille ſit, quem Matheſis refert ex longo apparatu vocabulorum, quibus diſcentium ingenia torquent Algebriſtæ, dum illis exponunt quid ſignificet Paraboliſmus, Hypobibaſmus, Algorithmus, & innumeræ huiuſmodi voces, à Græcis non malè adhibitæ, ſed nihil amplius ſignificantes, quam quod apud Latinos vſitatis vocibus commodè exprimi poteſt; ſimiliter necdum intelligo quare in progreſſionibus Geometricis ab vnitate incipientibus veluti viam notent, qua ab Arithmetica ad Algebram progrediendum ſit; Cur diſcentibus obtrudant numeros ipſo nihilo minores, adeoque fictitios; & his addi velint imaginaria numerorum latera, quadrata, cubos, quadrato quadrata, quadrato cubos, &c. vera enim latera, quadrata, aut cubi non inueniuntur niſi in quantitate continua. Laudo Algebriſtarum varia inuenta; apparatum non laudo: & non paruam huius apparatus partem diligenter collectam, ab antiquioris, ſiue numeroſæ, vt eam appellant, Algebræ ſcriptoribus, planè neglectam video, à ſcriptoribus recentioris, ſiue ſpecioſæ Algebræ: hanc tamen, antiqua Algebra longo interuallo præſtantiorem eſſe, apud omnes in confeſſo eſt. vtinam etiam cætera neglexiſſent, quæ ita Algebræ propria ſunt, vt reliquæ Matheſi non ſint communia! hoc facio in mea Logiſtica, ac propterea non video, quare dici debeat Algebra. Fateor quidem à me adhiberi vocem, dignitas, quæ vox in reliqua Matheſi magnopere vſitata non eſt: & ipſam (vt ita dicam) Algebræ regulam. verum ſi dignitates, quarum apud Algebræ ſcriptores vſus eſt, conferas cum illis dignitatibus, quas ego adhibeo facile intelliges, priores cum poſterioribus ſola voce conueni-

uenire; etenim apud ipsos, dignitas, est terminus progressionis Geometricæ incipientis ab vnitate, quæ vnitas, non est terminus, sed initium progressionis: ergo neque hæc vnitas, neque, o, dici potest dignitas, neque æquari dignitati; oppositum apud me verum esse, non vno in loco annotaui in mea Logistica; quare alia apud Algebræ scriptores, alia apud me, est significatio dignitatis. Quam ego Logisticæ regulam appellaui, parum differre ab Algebræ regula, verissimum est; non admitto tamen, aut Logisticæ, aut Algebræ regulam aliquid continere, quod reliquæ Mathesi non sit commune; quid enim magis vsitatum in Mathesi, quam pro quantitate incognita assumere alphabeti litteram, & facta hac hypothesi, discursum instituendo, incognitæ eiusmodi quantitatis, cum alia cognita quantitate æqualitatem, vel aliam proportionem inferre, atque ita venire ad cognitionem quantitatis prius incognitæ? certè huiusmodi discursus passim inueniuntur in singulis Matheseos partibus, atque à Mathematicis fuerunt adhibiti antequam nascerentur primi Algebræ inuentores, & Architecti, à quibus ex reliqua Mathesi assumptus huiusmodi discursus, Algebræ regula appellatur; cum hac Algebræ regula, eamdem originem agnoscit nostra Logisticæ regula, quam ex Algebra negamus progenitam aut desumptam; quare neque in dignitatibus, neque in Logisticæ regula aliquid adhibeo mutuatum ab Algebra, siue de illa Algebra sermo esi, quam numerosam appellant, & satis humilis est: siue de illa, quam dicunt speciosam, & priore longe præstantior est: nihil tamen in vtraque Algebra vtile, aut æstimatione dignum inuenitur, ad quod non se extendat nostra Logistica; quippe quæ tam latè excurrit vndique, vt nihil ad Mathesim vtile inueniatur, ad quod sese diffundere non possit: neque agnoscat terminos, aut limites ab illis diuersos, quibus tota Mathesis circumscripta continetur. Hæc mea est sententia, quam tuo iudicio vltro submitto, paratus eam mutare, quamprimum cognouero quod à veritate aberret.

PARS SECVNDA.

VEnio ad secundum à te mihi propositum, cui vt satisfaciam, singula Theoremata proposita c.8. lib.1. nostræ Logisticæ, hic tantummodo describenda sunt, atque illis apponendæ demonstrationes, quas pro lib.3. reseruaueram: timebam enim ne primi libri studiosum potius perturbarent, quam iuuarent eiusmodi discur-

ſus demonſtratiui, atque parum proportionati illis, qui necdum ſuperaſſent eam partem noſtræ Logiſticæ, quæ in primo libro exponitur. Quod vero prædicta Theoremata hoc loco non proponam eodem ordine, quo propoſita ſunt in primo libro, nihil refert; illic enim demonſtrationibus deſtituta, nullum certum ordinem exigebant: hic vero, ita proponi debent, vt in nullius demonſtratione, aliquid aſſumatur, quod ante non fuerit demonſtratum.

Theorema I.

QValeſcunque fuerint quantitates, A,B,C,D,E,F, ita tamen vt A *ad* B = D *ad* E. Et inſuper B *ad* C = E *ad* F.

Dico ex æquo, etiam A *ad* C = D *ad* F.

Poſſent occurrere duo caſus diuerſi; Vel enim quantitates A,B,C. ſunt eiuſdem generis, cum quantitatibus D,E,F: vel ſunt diuerſi generis: vt vtroque caſu, eadem demonſtratione concludam intentum, ponatur conſtructio ſubſequens (quæ in ſecundo caſu neceſſaria eſt) aſſumantur quantitates H,K,L. eiuſdem generis, cum quantitatibus A, B, C; ita vt D *ad* E, = H *ad* K. Item E *ad* F = K *ad* L. Item D *ad* F = H *ad* L.

Demonſtratio. Per hypotheſim & conſtructionem A *ad* B = H *ad* K, ergo permutando A *ad* H = B *ad* K. Rurſus per hypotheſim, & conſtructionem B *ad* C = K *ad* L, ergo etiam permutando B *ad* K = C *ad* L. Igitur rationes A *ad* H; Item C *ad* L æquantur eidem tertiæ rationi B *ad* K. Ergo A *ad* H = C *ad* L. Ergo permutando A *ad* C = H *ad* L. Sed per conſtructionem etiam D *ad* F = H *ad* L. Ergo A *ad* C = D *ad* F. Quod erat demonſtrandum. Et hoc eſt Theorema 1. cap. 8. lib. 1. Logiſticæ.

Theorema II.

QValeſcunque fuerint quantitates A,B,C,D,Z. Ita tamen vt B *ad* Z = C *ad* D.

Dico A *in* C, *ad* B *in* D = A *ad* Z.

Demonſtratio. Per 8. Axioma C *in* B *ad* D *in* B = C *ad* D, ſed etiam per hypotheſim B *ad* Z = C *ad* D. Ergo C *in* B *ad* D

in

in B = B *ad* Z. Atqui etiam per 8. Axioma A *in* C *ad* C *in* B = A *ad* B. Ergo A *in* C *ad* B *in* C = A *ad* B: & inſuper C *in* B *ad* D *in* B = B *ad* Z. Ergo ex æquo per 1. Theorema A *in* C *ad* B *in* D = A *ad* Z. Quod aſſerebatur. En Theorema 2. cap. 8. lib. 1. Logiſticæ.

Theorema III.

QValeſcunque fuerint quantitates A, B, C, D.

Dico 1. Si A *ad* B = C *ad* D. etiam A *in* D = B *in* C.

Dico 2. Si A *in* D = B *in* C, etiam A *ad* B = C *ad* D.

Conſtructio. Ponatur quantitas Z, vt B *ad* Z = D *ad* C.

Demonſtratio. Per hypotheſim A *ad* B = C *ad* D. Sed per conſtructionem etiam Z *ad* B = C *ad* D. Ergo A *ad* B = Z *ad* B. Ergo per 7. Axioma A = Z. Sed quoniam per conſtructionem B *ad* Z = D *ad* C, etiam per 2. Theorema A *in* D *ad* B *in* C = A *ad* Z. Ergo A *in* D = B *in* C. Quod erat propoſitum in prima parte.

Demonſtratio ſecundæ partis. Per hypotheſim A *in* D = B *in* C: atqui per conſtructionem, & Theorema ſecundum A *in* D *ad* B *in* C = A *ad* Z. ergo A = Z: Ergo per 7. Axioma, B *ad* A = B *ad* Z: Sed per Conſtructionem B *ad* Z = D *ad* C: Ergo B *ad* A = D *ad* C. Ergo inuertendo A *ad* B = C *ad* D. Quod erat propoſitum in ſecunda parte. En Theorema 4. cap. 8. lib. 1. Logiſticæ.

Theorema IV.

QValeſcunque fuerint quantitates A, B, D,

Dico 1. Si A *ad* B = B *ad* D, etiam A *in* D = B *q*.

Dico 2. Si A *in* D = B *q*: etiam A *ad* B = B *ad* D.

Demonſtratio huius Theorematis, immediatè patet ex 3. Theoremate. En Theorema 5. cap. 8. lib. 1. Logiſticæ.

Theo-

Theorema V.

QValeſcunque fuerint quantitates A,B,C.
Dico A *ad* B = C *ad* C *in* B *per* A.
Conſtructio C *in* B = X.

Demonſtratio. Ex conceptu diuiſionis, patet, quod A *ad* X = 1 *ad* X *per* A. Ergo per 3. Theorema, etiam A *in* X *per* A = X *in* 1; Sed X *in* 1. = X. Ergo A *in* X *per* A = X: Sed per Conſtructionem, X = C *in* B. Ergo A *in* C *in* B *per* A = C *in* B. Ergo per 3. Theorema A *ad* B = C *ad* C *in* B *per* A. En Theorema 3. cap. 8. lib. 1. Logiſticæ.

Theorema VI.

QVualeſcunque fuerint quantitates A,B,C,D.
Dico 1. Si A *ad* B = C *ad* D, etiam A = B *in* C *per* D.
Dico 2. Si A = B *in* C *per* D. etiam A *ad* B = C *ad* D.

Demonſtratio primæ partis. Per hypotheſim A *ad* B = C *ad* D, ergo inuertendo B *ad* A = D *ad* C. Atqui per 5. Theorema D *ad* C = B *ad* B *in* C *per* D. Ergo etiam B *ad* A = B *ad* B *in* C *per* D. Ergo per 7. Axioma A = B *in* C *per* D, vt dicitur in prima parte.

Demonſtratio ſecundæ partis. Per 5. Theorema B *ad* B *in* C *per* D = D *ad* C. Atqui per hypotheſim etiam A = B *in* C *per* D: Ergo per 7. Axioma B *ad* A = D *ad* C. Ergo inuertendo A *ad* B = C *ad* D. Vt dicitur in ſecunda parte. En Theorema 6. cap. 8. lib. 1. Logiſticæ.

Theorema VII.

QValeſcunque fuerint quantitates A,B,C.
Dico 1. Si A *in* B = C; etiam C *per* A = B. Item C *per* B = A.
Dico 2. Si C *per* B = A; vel C *per* A = B etiam A *in* C = B.

Demonſtratio primæ partis. Per hypotheſim A *in* B = C: ergo ex conceptu multiplicationis, 1 *ad* A = B *ad* C: ergo etiam A *ad* C = 1 *ad* B: Item B *ad* C = 1 *ad* A: Ergo ex conceptu diuiſionis C *per* A = B: Item C *per* B = A; vt aſſeritur in prima parte.

De-

Demonſtratio ſecundæ partis. Per hypotheſim C *per* B = A, vel C *per* A = B: ergo ex conceptu diuiſionis, B *ad* C = 1 *ad* A; vel A *ad* C = 1 *ad* B: Ergo per 3. Theorema A *in* B = 1 *in* C: ſed 1 *in* C = C: ergo A *in* B = C: vt aſſeritur in ſecunda parte. Eſt Theorema 8. cap.8. lib.1. Logiſticæ.

Theorema VIII.

QValeſcunque fuerint quantitates B,C,D.

Dico B *per* D *ad* B *per* C = C *ad* D.

Demonſtratio. Ex conceptu diuiſionis D *ad* B = 1 *ad* B *per* D: Ergo per 3. Theorema D *in* B *per* D = B: Simili argumento patet C *in* B *per* C = B: Ergo D *in* B *per* D = C *in* B *per* C: Ergo per 3. Theorema D *ad* B *per* C = C *ad* B *per* D: Ergo etiam B *per* D, *ad* B *per* C = C *ad* D. Quod erat demonſtrandum. Eſt Theorema 7. cap.8. lib.1. Logiſticæ.

Theorema IX.

QValeſcunque fuerint quantitates A,B,C,D,Z. Ita tamen vt D *ad* Z = A *ad* B.

Dico A *per* D *ad* B *per* C = C *ad* Z.

Demonſtratio per 8. Theorema A *per* D *ad* A *per* C = C *ad* D: Sed etiam per 8. Axioma A *per* C *ad* B *per* C = A *ad* B ≏ D *ad* Z, vt patet ex hypotheſi: Ergo ex æquo per 1. Theorema A *per* D *ad* B *per* C = C *ad* Z. Quod erat demonſtrandum.

PARS TERTIA.

EX pluribus, quæ in mea Logiſtica ſingularia poteris obſeruare, vnum tibi affero: Compendium ſcilicet, quod eſt Logiſtica noſtra habetur in rebus Mathematicis. Quid ſi nouem Theorematibus paulo ante demonſtratis, totidem alia Theoremata adderem, atque oſtenderem, pauca illa Theoremata abunde ſufficere, vt aliquis terminorum ignorantia non laborans, atque leuiter verſatus in Logiſtica, proprio marte inferre, atque demonſtrare poſſit, immenſam illam propoſitionum multitudinem, in quibus ab Euclide aliquid ſtatuitur de proportione nume-

numerorum, angulorum, linearum, ſuperficierum, aut corporum; Non dubito quin in tali compendio aduerteres aliquid ſingulare. Si igitur ita placet, ſumemus experimentum, vtrum Logiſtica noſtra præſtet tale Compendium. In quem finem præcedentibus theorematibus agentibus de quacunque quantitate (ex quibus aliqua, nonniſi animi gratia ſunt propoſita) hic addam totidem alia theoremata, ſub aſſertionum titulis propoſita, atque ſpectantia, non ad quamlibet quantitatem, ſed propria quantitati continuæ; in illis enim agitur de angulis, quos ſola quantitas continua admittit; vel de ductibus, ex quibus ſola quantitas continua habet originem, atque hæc theoremata adhibeo, vt vniuerſalibus theorematibus contentas veritates, reſtringam ad veritates Geometricas, Pro cuius pleniori intelligentia, notari cuperem ſequentia.

Aliqua notanda circa quantitatum Additionem, ſubtractionem, ductum, & Reductum.

PEr Ductum, & Multiplicationem, idem ſignificare, vſu receptum eſt: pari modo per Reductum & diuiſionem, idem ego intelligo. Iam vero quantitates omnes, ſiue vniuerſales, ſiue continuæ, ſiue diſcretæ ſint; tamen admittunt additionem, ſubtractionem, ductum, & reductum, hoc eſt multiplicationem & diuiſionem. Præterea ſingulæ illæ quantitates, neceſſario creſcunt, ſiue augentur per additionem; decreſcunt, ſiue minuuntur per ſubtractionem; In ſingulis tamen, eumdem effectum non cauſat ductus, aut reductus: Vniuerſalis enim, aut diſcreta quantitas, quæ habetur ex ductu, aut reductu, etiam haberi poteſt ex iterata additione, aut ſubtractione partium illius quantitatis, quæ ducitur, aut reducitur; atque adeo non datur vllus ductus, aut reductus, ſiue multiplicatio, aut diuiſio quantitatis vniuerſalis, aut diſcretæ, cui non planè æquiualeat additio, vel ſubtractio; & in his quantitatibus, omnis ductus, vel reductus, etiam eſt additio, vel ſubtractio magnitudinis, ſimilis ei quæ inuenitur in eo quod ducitur, vel reducitur. In continua quantitate, oppoſitum accidit; etenim nulla continua quantitas quæ habetur ex ductu vel reductu, haberi poteſt ex ſola iterata additione aut ſubtractione

partium

partium, illius quod ducitur; atque adeo non datur vllus ductus generans continuam quantitatem, cuj æquiualeat additio, aut subtractio; quod idem de reductu verum est; etenim in quantitate continua, ductus & reductus, causant diuersitatem genericam inter illud quod ducitur aut reducitur, & illud quod habetur ex ductu aut reductu, adeo vt de quolibet ductu qui continuæ quantitati conuenit, verificetur, quod sit additio extensionis nouæ atque diuersæ ab ea quæ inuenitur in eo quod ducitur: de reductu autem verificetur quod sit subtractio, siue destructio alicuius extensionis quæ inueniebatur in eo quod reducitur. Non datur vlla quantitas continua, quæ non sit linea, vel superficies, vel corpus, & ex his continuis quantitatibus nulla aliter quam ex ductu nascitur, vt supra innuj; linea quidem ex ductu punctj; superficies vero ex ductu lineæ; denique corpus ex ductu superficiei. Contra vero, corpus reductum, desinit in superficiem, & superficies reducta, desinit in lineam; denique linea reducta in punctum degenerat. Iam vero licet vniuersalium, aut discretarum quantitatum ductus inter se diuersi non inueniantur; tamen ductus illi ex quibus continua quantitas produci potest, admittunt maximam varietatem atque diuersitatem; & ab hac ductuum diuersitate, resultat omnis dissimilitudo, quæ inuenitur in continuis quantitatibus; atque diligentissime expenditur à Geometria, non tanquam finis, quem intendit, sed tanquam medium ad finem maxime necessarium: finis enim à Geometria intentus, diuersus non est à fine quem intendit Arithmetica; nimirum cognitam reddere magnitudinem propositæ quantitatis; siue inuenire proportionem, quam proposita quæuis quantitas habet ad cognitam aliquam eiusdem generis quantitatem: Hoc enim de continuis quantitatibus statuere, proprium Geometriæ munus est; atque illud idem statuere de quantitatibus discretis, proprium est officium Arithmeticæ. Verum vt Geometria determinare possit eam proportionem, quam quantitas incognita habet ad cognitam aliquam eiusdem generis quantitatem continuam, maximi momenti est consideratio similitudinis aut dissimilitudinis extensionum, quæ conuenire possunt continuis quantitatibus: quæ similitudo, tota dependet à modo, quo continuæ quantitates per ductus nascuntur; non quod omnes quantitates continuæ similes sint, quæ ex ductibus similibus generantur, sed quod similes esse non possint, quin etiam possint intelligi ex ductibus similibus genitæ; quodque cæteris paribus, similes ductus, nonnisi æquales quantitates producant, licet maxime inæqua-

les eſſe poſſint, quæ cæteris paribus, diuerſis ductibus producuntur. Hinc vt veritates vniuerſales reſtringi poſſint ad Geometricas, ſciri debent proprietates diuerſorum ductuum, quos admittit continua quantitas, & ex quibus naſci, aut produci poteſt. Ex multis huiuſmodi ductibus inter ſe diuerſis, paucos aliquos hic propono, & affero proportionem, quam inter ſe habent ex illis ductibus genitæ quantitates continuæ, ſuppoſito ſemper eodem principio generante, quod Baſis nomine indico. Vbi dictas proportiones expoſuero, veniam ad nodum rei de qua hic ago, atque indicabo vniuerſalium propoſitionum vtilitatem, & oſtendam quomodo in illis, tanquam in fontibus habeantur veritates, quas intendit Geometria, & Arithmetica; Et niſi fallor ex his intelliges harum ſcientiarum Compendium paulo ante inſinuatum.

Definitiones aliquorum ductuum, ex quibus naſci poſſunt quantitates continuæ.

IN ordine ad definitiones, aut deſcriptiones ductuum hic proponendorum, notari vellem. Primo, quod hic non conſiderem, puncti ductum, ex quo linea naſcitur; ſed tantum ductus aliquos, ex quibus, aut ſuperficies, aut corpora producuntur. Secundo. Baſim, à me appellari, illam quantitatem, quæ in aliam ducitur. Tertio. Ductum parallelum, dici illum, in quo baſis, ita recedit à primo ſuo veſtigio, vt ſemper maneat parallela ad illud veſtigium. Quarto. Ductum circularem, appellari eum, in quo vnum baſis extremum quieſcit, & reliqua baſis circulariter mouetur, circa extremum quod quieſcit, & fixum remanet. His prænotatis.

Primus ductus vocetur, quando baſis (quæ curua non ſit, vel amiſſa curuitate deſinit eſſe curua) ductu parallelo aſſurgit in altitudinem, per ipſam altitudinem, ita vt baſis extẽſio ſemper maneat inuariata. Hinc A *in* C ductu primo, ſignificat baſim A, ductu parallelo motam per lineam C, perpendicularem ad baſim A. Hoc primo ductu generantur rectangula, ex baſi, quæ ſit linea. Item parallelepipeda recta, ex baſi quæ ſit parallelogrammum. Item priſmata recta, ex baſi quæ ſit ſuperficies plana, & rectilinea. Item Cylindri recti, ex baſi, quæ ſit circulus. Item prædictorum corporum ſuperficies laterales, ex circumferentia baſium, quæ generant dicta corpora.

No-

Notandum hic eſt, quod licet primus ductus iam deſcriptus proprius ſit continuæ quantitati, tamen planè æquiualet ductui communi omnibus quantitatibus, hoc eſt illi, in quo tota vna magnitudo, ducitur in totam aliam magnitudinem: atque hinc ſit quod æquiualenter idem ſignificet A *in* C, & A *in* C ductu primo; poſtremus tamen loquendi modus non adhibetur, quando non agitur de quantitate continua. Præterea quando ſermo eſt de primo ductu, non conſideratur niſi extenſio baſis, quæ ducitur, & altitudinis in quam baſis ducitur, non vero curuitas, licet baſis curua ſit: quare eoipſo quod A = B, & inſuper C = D, neceſſario A *in* C ductu primo = B *in* D ductu primo, tametſi quantitates A & C non habeant vllam curuitatem, & quantitates B & D habeant quamcunque curuitatem.

Secundus ductus vocetur, quando baſis ductu parallelo aſſurgit in altitudinem per lineam obliquam ipſi baſi, ita tamen, vt baſis extenſio ſemper maneat inuariata. Hinc A *in* C ductu ſecundo, ſignificat baſim A ductu parallelo motam ad altitudinem C, ſed per lineam obliquam ad baſim A. Hoc ſecundo ductu generantur parallelogramma non rectangula, ex baſi quæ ſit recta linea. Item parallelepipeda non recta, ex baſi quæ ſit parallelogrammum. Item priſmata non recta, ex baſi quæ ſit ſuperficies plana, & rectilinea. Item cylindri non recti, ex baſi quæ ſit ſuperficies plana & curuilinea. Item prædictorum corporum ſuperficies laterales, ex circumferentia baſium, quæ generant dicta corpora.

Tertius ductus vocetur, quando baſis ductu parallelo aſſurgit in altitudinem per lineam ad baſim rectam, vel obliquam: ita tamen vt baſis in ipſo ductu, ſemper vniformiter decreſcendo, deſinat in lineam, vel punctum. Notari hic poteſt tertium hunc ductum eſſe mixtum ex ductu & reductu baſis, adeo vt in illo ſimul concurrant baſis ductus in altitudinem, & etiam vnius, vel duarum extenſionum baſeos reductus per eamdem altitudinem. Hinc A *in* C ductu tertio, ſignificat baſim A ductu parallelo motam ad altitudinem C, ita tamen, vt in ipſo motu ſemper vniformiter decreſcendo, pereat vna, vel vtraque extenſio baſis A. Hoc tertio ductu generantur quælibet triangula rectilinea, ex baſi quæ ſit recta linea. Item ſectores circulorum, ex arcubus quibus inſiſtunt. Item dimidius circulus, ex dimidia circumferentia. Item totus circulus, ex tota circumferentia. Item quælibet pyramides, ex baſi, quæ ſit ſuperficies plana, & rectilinea. Item quilibet coni, ex baſi quæ ſit circulus, vel ellipſis. Item ſectores ſphæræ, ex curuis

ſphæræ ſuperficiebus, quibus inſiſtunt. Item dimidiæ aut integræ ſphæræ ex dimidia, aut integra ſphæræ ſuperficie. Item pyramidum, conorum, aut ſectorum ſphæræ ſuperficies laterales, ex circumferentia ſuperficiei, ex qua corpus producitur.

Quartus ductus vocetur, quando baſis quæ ſit recta linea, vel rectangulum, illi inſiſtens mouetur circulariter, circa latus rectanguli rectæ lineæ inſiſtentis; quo caſu altitudo ad quam baſis hoc ductu intelligitur aſſurgere, eſt arcus qui deſcribitur à puncto baſis, quod magis diſtat à latere quieſcente. Hinc A *in* C ductu quarto, ſignificat baſim A, quæ ſit recta linea, vel rectangulum illi inſiſtens, motam circulariter circa latus talis rectanguli. hoc quarto ductu generantur ſectores circulorum, aut dimidij, aut integri circuli, ex baſi, quæ ſit radius circuli. Item cylindri recti, ex baſi, quæ ſit rectangulum.

Quintus ductus vocetur, quando baſis, quæ ſit ſemicirculus, vel curua eius circumferentia, mouetur motu circulari, circa diametrum ſemicirculi: quo caſu, altitudo ad quam hoc ductu intelligitur baſis aſſurgere, eſt linea quæ deſcribitur à puncto baſis, quod magis diſtat à linea, ſiue diametro quieſcente. Hinc A *in* C ductu quinto, ſignificat ſemicirculum, vel eius curuam circumcumferentiam, motam circulariter circa diametrum, per arcum C deſcriptum à puncto baſis, quod magis diſtat à diametro quieſcente. Hoc quinto ductu, generantur ſphærarum ſuperficies, ex baſi quæ ſit curua ſemicirculi circumferentia. Item ſphæræ, ex baſi quæ ſit ſemicirculus.

Ductus ſimiles, dicuntur, in quibus baſes ſimili modo ducuntur in altitudines, ſiue baſes illæ inter ſe ſimiles fuerint, ſiue diſſimiles.

Aſſertiones fundamentales de ductibus: ſiue de proportionibus quantitatum, ex ſimilibus, vel diuerſis ductibus genitarum.

NOta litteras A & B, ſignificare baſim, ſiue continuam quantitatem quæ ducitur. Item C & D, ſignificare altitudinem, in quam baſis ducitur, eo ductu de quo agitur. Item E, ſignificare,

re, tot vnitates quot basis extensiones in ipso ductu decrescunt. Item F significare tot vnitates, quot extensiones basi conueniunt. Denique in assertione de quinto ductu, per litteram G intelligi debet tota diameter basis, quę ducitur: & per litteram C intelligi debet tota circumferentia circuli diametro G descripti: vel per G & C intelligi debent partes prædictarũ linearũ, ipsis totis proportionales.

Assertio prima. A *in* C ductu primo, ad A *in* C ductu secundo = *1 ad 1*.

Assertio secunda. A *in* C ductu primo, ad A *in* C ductu tertio = A *in* C ad A *in* C per 1 † E, hoc est *6 ad 3*, vel *6 ad 2*.

Assertio tertia. A *in* C ductu primo, ad A *in* C ductu quarto = *2 ad 1*.

Assertio quarta. A *in* G ductu primo, ad A *in* C ductu quinto = 1 † F *ad* 4.

Assertio quinta. A *in* C *ad* B *in* D = A *in* C quouis ductu, ad B *in* D simili ductu.

Assertiones fundamentales pro Arcubus circulorum, eorumque sinibus, subtensis, & angulis qui arcubus insistunt.

Assertio sexta. Circumferentia circuli X, ad circumferentiam circuli Z, habet eamdem proportionem, quam radius circuli X, habet ad radium circuli Z.

Assertio septima. Si arcus A ad arcum B = radio C ad radium D; Etiam sinus E ad sinum F, item subtensa G ad subtensam H = radio C ad radium D; & viciſſim, si sinus E, ad sinum F, vel subtensa G ad subtensam H = radio C ad radium D, etiam arcus A ad arcum B = radio C ad radium D.

Nota, in hac & sequenti assertione supponi quod C sit radius, E sinus, G subtensa, eiusdem arcus A. Item quod D, sit radius, F sinus, H subtensa, eiusdem arcus B.

Assertio octaua. Posito quod arcus A & B singuli producti transeant per verticem anguli, qui arcubus insistit; vel singuli arcus A & B, centrum habeant in vertice anguli, qui arcubus insistit; tunc si subtensa G ad subtensam A: vel sinus E ad similem sinum F = radio C ad radium D: etiam anguli arcubus A & B insistentes erunt interse æquales; & viciſſim, si anguli arcubus A & B insistentes, sint interse æquales, etiam sinus E, ad sinum

F; &

F; & ſubtenſa G ad ſubtenſam H = radio C ad radium D.

Nota quòd per ſinus ſimiles, intelligam illos ſinus, qui ſinguli ſint ſinus arcuum, aut æqualium, aut maiorum, aut minorum quarta parte circuli. Si vero vnus ſinus conueniat arcui, qui ſit maior quarta parte circuli, alter conueniat arcui, qui ſit minor quarta parte circuli, hi ſinus erunt diſſimiles.

Aſſertio nona. Si angulus P inſiſtat duobus arcubus K & L æqualibus radijs deſcriptis, & prior K productus tranſeat per verticem anguli P, ſecundus arcus L, habeat centrum in vertice anguli P: etiam arcus K æquabitur duobus arcubus L.

Propoſitas hic aſſertiones, ſpectantes ad angulos, aut continuarum quantitatum geneſim, legitimis demonſtrationibus ſtabiliendas eſſe non ignoro; eas tamen demonſtrare, huius loci non eſt, vbi aliud mihi onus non incumbit, quam oſtendere, quis vniuerſalium propoſitionum vſus ſit, atque vtilitas; & quam vtile, ac commodum Geometriæ, atque Arithmeticæ compendium afferant: Hoc vt appareat, inſpice ſi placet Euclidis elementa, atque inter immenſam multitudinem propoſitionum, aliquas elige, in quibus aſſeritur proportio quam interſe habent, aut anguli, aut numeri, aut lineæ, aut ſuperficies, aut corpora; & notatas à te propoſitiones ad me tranſmitte; vel ex ſuperioribus octodecim theorematibus tranſmiſſas ad me propoſitiones, nō à me, ſed ab aliquo ex meis demonſtratas exhibebo tali diſcurſu, quem commode per ſe facere poſſit aliquis leuiter inſtructus mea Logiſtica, dummodo terminorum ignorantia non laboret: vel id præſtare non potero. Si primum fateri debebis ex paucis veritatibus paulo ante propoſitis; tanquam ex fontibus deriuari riuulos, prolixè propoſitos, atque laborioſè exhibitos ab Euclide; eoſque omnes in his fontibus poſſideri. Si vero id, per meos, præſtare non poſſim in ſingulis ex dictis propoſitionibus Euclideis; ego amplius aliquid conabor tibi perſuadere, nimirum inſinuatum hactenus Geometriæ, atque Arithmeticæ compendium, minus eſſe, quam dimidiam partem illius compendij, quod octodecim theorematibus complector.

Iam vèro, vt videas modum quo prædictas propoſitiones Euclideas remittam demonſtratas: propono pauca ex præcipuis theorematibus Archimedis, quibus addo demonſtrationes non abſimiles ijs, quæ adhibendæ erunt ad demonſtrandas propoſitiones Euclideas; ſic enim melius intelliges difficiles non futuros diſcurſus, quibus demonſtratas recipies propoſitiones Euclideas; & conſiderando quam facilè, quam expeditè, demonſtrentur propoſitiones Archimedis, longo interuallo difficiliores Euclideis, facile

tibi

tibi persuadebis, me non nimis magnificè locutum fuisse de compendio quod habetur ex nostra Logistica, quando dixi, illud amplecti superius enarratam propositionum Euclidearum multitudinem.

Teorema I.

DIco tam circulos, quam Sphærarum superficies, interse habere duplicatam rationem radiorum.

Demonstratur prima pars. Circumferentia circuli X sit A, radius eius sit C; similiter circumferentia circuli Z, sit B, radius eius sit D. Hoc posito, A *in* C ductu tertio = circulo X. Item B *in* D ductu tertio = circulo Z: atqui per 5. Assertionem, A *in* C, ductu tertio ad B *in* D, ductu tertio = A *in* C ad B *in* D: Ergo circulus X ad circulum Z = A *in* C ad B *in* D. Atqui patet ex terminis & Theoremate 3. secundæ partis A *in* C ad B *in* D habere duplicatam rationem C *ad* D; quandoquidem per 6 assertionem, A *ad* B = C *ad* D: Ergo etiam circulus X ad circulum Z, habet duplicatam rationem C *ad* D. Quod erat primum.

Pro secunda parte. Radio sphæræ X descripta dimidia circuli circumferentia, sit A: eodem radio descripta integra circuli circumferentia sit C; similiter radio sphæræ Z, descripta dimidia circuli circumferentia sit B: Eodem radio descripta integra circuli circumferentia sit D. His positis, eodem prorsus modo, secundam partem probo, quo primam demonstraui: Etenim A *in* C ductu quinto = superficiei sphæræ X. Item B *in* D, ductu quinto = superficiei sphæræ Z: Atqui per quintam Assertionem, A *in* C ductu quinto, ad B *in* D ductu quinto = A *in* C ad B *in* D. Ergo superficies sphæræ X ad superficiem sphæræ Z = A *in* C ad B *in* D: Sed quoniam per hypothesim & sextam assertionem, A *ad* B = C *ad* D: Etiam ex terminis, & Theoremate 3. secundæ partis patet A *in* C ad B *in* D habere duplicatam rationem B *ad* D: Ergo superficies sphæræ X ad superficiem sphæræ Z, habet duplicatam rationem C *ad* D: sed per 6. Assertionem, C *ad* D = radio sphæræ X, ad radium sphæræ Z: Ergo superficies sphæræ X ad superficiem sphæræ Z, est duplicata rationis, quam habet radius sphæræ X ad radium sphæræ Z. Vt in secunda parte asseritur.

Theo-

Theorema II.

DIco ſphæræ ſuperficiem eſſe quadruplam maximi circuli eiuſdem ſphæræ.

A ſit dimidia circumferentia circuli radio ſphæræ deſcripti, C ſit integra circumferentia circuli eodem radio deſcripti. D ſit radius ſphæræ. His poſitis. Ex conceptu tertij ductus patet, A *in* D ductu tertio = dimidio circulo maximo ſphæræ; ſed per aſſertionem ſecundam; A *in* D ductu primo ad A *in* D ductu tertio = *6 ad 3*: Ergo A *in* D ductu primo = circulo maximo ſphæræ: ergo A *in* 2 D ductu primo = duobus circulis maximis ſphæræ: atqui etiam A *in* C ductu quinto = ſuperficiei ſphæræ: Ergo duo circuli maximi ſphæræ ad totam ſphæræ ſuperficiem = A *in* 2 D ductu primo, ad A *in* C ductu quinto: ſed per quartam aſſertionem, A *in* 2 D ductu primo, ad A *in* C ductu quinto = 2 *ad* 4: Ergo duo maximi circuli ſphæræ, ad ſuperficiem ſphæræ = 2 *ad* 4: Ergo etiam quatuor maximi circuli ſphæræ = toti ſuperficiei ſphæræ: Vt aſſerebatur.

Theorema III.

DIco ſphæras habere triplicatam rationem radiorum.

Radio ſphæræ X deſcriptus ſemicirculus ſit A. Eodem radio deſcripta circuli circumferentia, ſit C. Similiter radio ſphæræ Z, deſcriptus ſemicirculus ſit B; eodem radio deſcripta integra circuli circumferentia ſit D. His poſitis, propoſitam veritatem euinco; diſcurſu planè ſimili, quo vſus ſum, vt oſtenderem circulos habere duplicatam rationem radiorum. Etenim A *in* C ductu quinto = ſphæræ X. Item B *in* D ductu quinto = ſphæræ Z: Sed A *in* C ductu quinto ad B *in* D ductu quinto = A *in* C ad B *in* D; vt patet ex quinta aſſertione: Ergo etiam ſphæra X ad ſphæram Z = A *in* C ad B *in* D: atqui ex terminis, & Theoremate 3. partis ſecundæ patet A *in* C ad B *in* D habere triplicatam rationem C *ad* D; quandoquidem A *ad* B habet duplicatam rationem C *ad* D, vt conſtat in Theoremate 1. Ergo ſphæra X ad ſphæram Z habet triplicatam rationem C *ad* D; hoc eſt triplicatam rationem radiorum.

Theo-

Theorema IV.

REctæ A insistat rectangulum X, cuius altitudo B, sit æqualis ipsi C, dimidiæ circumferentiæ circuli Z, radio A descripti. Dico rectangulum X, æquari circulo Z.

A *in* B ductu primo = Rectangulo X: Item A *in* 2 C ductu quarto = circulo Z: Ergo Rectangulum X ad circulum Z = A *in* B ductu primo; ad A *in* 2 C ductu quarto: Sed A *in* B ductu primo = A *in* C ductu primo, cum per hypothesim B = C: Ergo A *in* C ductu primo ad A *in* 2 C ductu quarto = Rectangulo X ad circulum Z: atqui A *in* C ductu primo, ad A *in* 2 C ductu quarto = 1 *ad* 1, vt patet ex assertione tertia: Ergo etiam Rectangulum X ad circulum Z = 1 *ad* 1: Ergo Rectangulum X = circulo Z, vt asserebatur.

PARS QVARTA.

SVperest supremum postulatum. An in rigorosis strictisue compositarum æquationum enodationibus, diuersam à cæteris rationem ineam, an vero illorum vestigijs insistam. Vt huic postulato faciam satis, sequens problema tibi considerandum propono, quod continet modum resoluendi quamcunque æquationem compositam, consistentem inter quantitatem cognitam, & dignitates primas, secundis dignitatibus annexas, quibuscunque signis afficiantur. Tui Algebristæ, nisi fallor, in hunc modum problema proponerent. Resoluere quamcunque æquationem quadraticam, affectam sub latere.

Problema.

PRoposita sit quæcunque æquatio composita, consistens inter quantitatem cognitam, & duos numeros denominatos eamdem habentes dignitatem, vnus tamen numerus primas dignitates, alter dignitates secundas indicet.

Oporteat propositam æquationem resoluere.

Quantitas cognita quæ in vna æquationis parte inuenitur, vo-

cetur K. Item numerator dignitatum secundarum vocetur M. Denique dignitatem repræsentet littera A. His positis.

Primo scribantur sequentes duo numeri denominati M *a* 1 & K *a o* 1. secundo inueniatur valor aggregati ex N *q*, & M *in* 4 K. vel certè valor differentiæ N *q*, & M *in* 4 K, atque inuenti valoris prima radix vocetur H: tunc numerorum denominatorum M *a* 1, & K *a o* 1, minor æquabitur dimidiæ differentiæ H *&* N: maior vero æquabitur dimidio aggregato ex H *&* N, quare per caput sextum libri primi Logisticæ inuenietur valor numerorum denominatorum, qui in æquatione proposita continentur, aut aliorum quorumlibet habentium eamdem dignitatem, præter quod nihil requiritur ad æquationis resolutionem.

Ex. gr. Proposita sit hæc æquatio 1 *a* 1 † 4 *a* 2 = 18. igitur numeri iuxta primum præscriptum scribendi erunt 4 *a* 1 & 18 *a o* 1. deinde valor aggregati ex 1 *q*, & 4 *in* 4 *in* 18 erit 289; atque huius valoris prima radix est 17; quare dimidium differentiæ 17 *&* 1, hoc est 8, erit valor minoris ex duobus numeris denominatis 4 *a* 1, & 18 *a o* 1, atque alterius siue maioris valor erit dimidium aggregati ex 17 *&* 1, hoc est 9.

Rursus proposita sit æquatio in qua 4 *a* 2 − 1 *a* 1 = 14. igitur numeri iuxta primum præscriptum scribendi erunt 4 *a* 1 & 14 *a o* 1. deinde valor aggregati ex 1 *q* & 4 *in* 4 *in* 14 erit 225; atque huius valoris prima radix est 15: quare dimidium differentiæ 15 *&* 1, hoc est 7, erit valor minoris ex duobus numeris denominatis 4 *a* 1 & 14 *a o* 1, atque alterius siue maioris valor erit dimidium aggregati 15 *&* 1, hoc est 8.

Rursus posito quod 7 *a* 2 − 9 *a* 1 = 10, tunc numeri iuxta primum præscriptum scribendi erunt 7 *a* 1, & 10 *a o* 1., deinde valor aggregati ex 9 *q* & 7 *in* 4 *in* 10 erit 361; atque huius valoris prima radix est 19. quare dimidium differentiæ 19 *&* 9, hoc est 5 erit valor vnius ex duobus numeris denominatis 7 *a* 1 & 10 *a o* 1: atque alterius valor erit dimidium aggregati 19 *&* 9, hoc est 14.

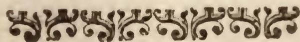
Rursus posito quod 7 *a* 2 − 9 *a* 1 = − 11 *per* 4, tunc numeri scribendi iuxta primum præscriptum erunt 7 *a* 1, & 11 *a o* 1 *per* 4. deinde valor differentiæ 9 *q* atque 7 *in* 4 *in* 11 *per* 4 erit 4: huius valoris prima radix est 2. quare dimidium differentiæ 2 *&* 9, hoc est 7 *per* 2 erit valor vnius ex numeris denominatis 7 *a* 1, &

1 1 *a o* 1

11 *a o* 1 *per* 4: atque alterius valor erit dimidium aggregati ex 2 & 9, hoc est 11 *per* 2.

Quandonam iuxta secundum regulæ præscriptum adhibendũ sit aggregatum, vt in tribus primis exemplis factum aduertes, vel quando differentia sumenda sit, quæ in postremo exemplo adhibetur, non determino: neque etiam hic addo propositi problematis maiorem quam admittit amplitudinem: aut eius demonstrationem, licet paucis lineis absoluatur: vel enim communis est resolutio quam problema continet, & planè inutile foret plura de illa scribere, vel certè apud alios non inuenitur, sed dici debet mea: hoc si ex se intelligam, statim rei meæ, ad me spectantem curam suscipiam, atque submittam quæ requirit problema, non alio fine hic tibi propositum, quàm vt videas an sit meum; ego in eius demonstratione non adhibeo nisi discursus agentes de quantitate quam appello vniuersalem, etenim (quod Algebræ scriptoribus familiare est) non consueui recurrere ad quantitatem continuam, vt demonstrem illud, quod pertinet ad quantitatem discretam, vel tam continuæ quàm discretæ quantitati commune est.

Hæc ad te scripsi fusius quam par erat, noui enim tuam in rebus Mathematicis scientiam, atque ingenij perspicacitatem, sed etiam tu nosti meam tenuitatem in enodandis difficultatibus, quas, quia paucis verbis vincere non poteram, scriptionem produxi, & præsertim conatus sum illas superare, quæ à te mihi fuere propositæ, etenim epistolæ ratio non patitur prosequi singula: quare tibi non satisfacero, sed neque mihi satisfeci. verum amicitiæ tuæ fiducia sustentor, & spero condonaturum te quod deesse perspicies: hanc à tua beneuolentia gratiam expecto; & longe maiorem præstabis, si errore aliquo me lapsum aduerteris, illo me liberes. vale & Mathematicas scientias excolere, & amare perge.



Præter typographi errores annotatos in fine ſecundi libri Logiſticæ, etiam ſequentes tales ſunt, vt Logiſticæ ſtudioſum non parum turbare poſſent, & in duobus primis libris inueniuntur.

Pag.30.lin.7. A *in* B = C lege C *in* A = B.

pag.69.lin.11. X *in* 4 Z = X — Z *q* lege X *in* 4 Z = X † Z *q*.

pag.72.lin.26. X *in* 2 Z = 1 *a* 2 lege X *in* 2 Z = 2 *a* 1.

pag.73. Problematis VI. ſecnnda ſolutio legenda, vt hic ſequitur. Numerorum X & Z minor ſit 1 *a* 1: ergo maior erit 12 — 1 *a* 1: ergo X ² † Z ² = 1 *a* 2 & † 12 — 1 *a* 1 *q* ♎ 1 *a* 2 † 144 — 24 *a* 1 † 1 *a* 2 ♎ 2 *a* 2 — 24 *a* 1 † 144: atqui per hypotheſim X ² † Z ² = 104 ergo 2 *a* 2 — 24 *a* 1 † 144 = 104 ergo 2 *a* 2 — 24 *a* 1 = — 40 reſoluendo hanc æquationem compoſitam, inuenies numerorum X & Z, minorem eſſe 2, & maiorem eſſe 10.

pag.87. lin.29. differentia X & Z lege differentia negatiua X & Z.

